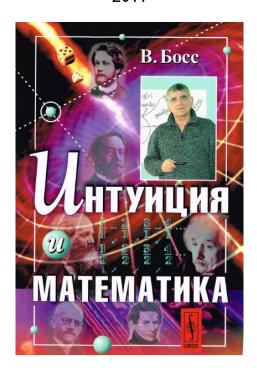
直観と数学

V. ボス

2017



LBC 22.10 22.1130 22.30

V. ボス

『直観と数学』, モスクワ, LENAND, 2017, 全 224 頁.

本書は多数の数学的着想の本質を解き明かしている。基本的な結果の意味が意外なほど 平明簡潔に伝えられ、複雑な事実が直観的に明らかな形で提示されている。叙述のスタイルには無駄がなく、親しみやすい語り口で書かれている。

本書は幅広い読者層、とりわけ学生と教師、技術者と科学者、そして所々にある高等数学に関する少しだけ難しい箇所を読み飛ばす技量を持った高学年の学校生徒向けに書かれている。

ISBN 978-5-9710-4018-7

© LENAND, 2014, 2016

* * * * *

日本語版について

本書は"Босс В., Интуиция и математика. Изд. стереотип. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 224 с. "のロシア語原文からの全訳である。

著者: ヴァレリー・イヴァノヴィッチ・オポイツェフ (Валерий Иванович Опойцев, Valeriy Ivanovich Opoytsev)。 V.ボス (Валерий Босс, Valeriy Boss) は筆名。経歴については巻末の「著者紹介」を参照されたい。

原著書は日本のロシア語書籍専門店で入手することができる。本書の初版は 2003 年に 出版された。初版に何度か増補改訂が加えられたものが現在の 2017 年版である。2003 年 版の PDF ファイル (第 17 章まで。本文には 2017 年版と一部異なる部分がある。また,原 著書に掲載されている図版の一部は削除されている)が下記のサイト「物理の旅の道すが ら」に掲載されている。

訳者:吉田 正友(サイト「物理の旅の道すがら」http://naturalscience.world.coocan.jp/)

日本語訳公開: 2017年12月

- * 訳文中の角括弧 [] 内は訳注である(文献指示を除く)。
- * 本書で使われている記号については巻末の「記号」を参照のこと。スカラー量とベクトル量の太字または矢印による表記分けがなされていないが、すべて原文のママとした。

目 次

まえがき	<u> </u>	6
第1章	抽象化の渦巻・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	7
	1. 数体の染色体・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	7
	2. 神秘ではない・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	9
	3. 別のニッチへの突破口・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	12
	注記と補足・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	14
第2章	原因を突きとめようとして・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	16
	1.2 つの課題・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	16
	2. 本当の根っこはどこだ?・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	18
	3. 対称性の謎・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	20
	注記と補足・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	23
第3章	催眠術と連想の魔術・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	24
	1. <i>n</i> 次元の特殊性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	25
	2. 魔物ではないか?・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	26
第4章	陳腐な事実の深遠さ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	29
	1. 共通の境界を持つ 100 万の領域・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	29
	2. 選択公理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	31
	3. バナッハ-タルスキーのパラドックス・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	32
	4. 不連続線形関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	33
	5. ヒルベルトの第3問題の解・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	35
第5章	否定的結果の価値について・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	37
	1. ブラウワーの定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	37
	2. 否定のエネルギー・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	38
	3. 実在する不快事象に対する需要・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	39
	注記と補足・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	41
第6章	無限大のパラドックス・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	43
	1. ショックにおける直観・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	44
	2. 斉次性の幻惑・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	45
第7章	確率論の謎・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	48
	1. 予想に反して・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	48
	2. 錯誤の源・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	49
	3. 呪いなのか、贈り物なのか?・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	52
第8章	最適化の暗礁・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	54
	1. 単純な罠・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	54
	2. 視覚化の手法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	55
	3. 創造主の自家製品・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	57

4 目 次

第9章	分岐とカタストロフ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	60
	1. メタモルフォーゼの原因・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	60
	2. 構造安定性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	62
	3. 氷山の水中部分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	63
	注記と補足・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	66
第10章	無限大へのもう一つの突破口・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	67
	1. 犠牲・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	67
	2. 関数解析 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	69
	3. 超関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	71
第11章	歴史のDNA・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	73
	1. 第5公準・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	73
	2. 暗中模索 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	74
	3. 愚弄的な定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	74
	4. クラインの手品・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	76
	5. メダルの裏側・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	77
	6. いくつかのディテール・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	79
第12章		81
	1. 速度分布・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	81
	2. お説教・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	82
	3. 原因と結果のコントラスト・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	83
	4. 不変性のイデオロギー・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	85
第 13 章	非線形現象・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	88
	1. アトラクターとフラクタル・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	88
	2. 自己相似性と宇宙・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	89
	3. 決定づけられたカオス・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	90
	4.1 次元の場合の豊かさ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	92
第 14 章		94
	1. 計算可能性・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	94
	2. 誤謬・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	95
	3. 帰納的なモチーフ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	97
	4. ディオファントス集合・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	97
	5. ゲーデルの定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	100
	6. 恒等式の基底定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	101
第 15 章	空間と時間・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	104
	1. 宇宙の謎・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	104
	2. アインシュタインとローレンツ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	105
	3. 一般相対性理論・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	109

第16章	バベルの塔・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	111
	1. シュレーディンガー方程式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	111
	2. 波動の伝播・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	113
	3. 熱伝導方程式・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	116
	4. 神秘的な相似性について・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	116
	5. 量子力学についてさらに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	118
第17章	ちっぽけな課題の偉大な役割・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	121
	1. フラッター効果・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	121
	2. 宇宙モデル・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	122
	3. 単純化の力・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	124
	4. あり得ない、だが事実だ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	125
	注記と補足・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	127
第18章	パラドックスを生む犯人としての直観・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	130
	1. 論理的色覚異常について・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	131
	2. 直観の内幕・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	133
	3. そして発展に対するブレーキとしてさえ・・・・・・・・・・・・・・・・・	133
付 録・		137
	1. 催眠術と数学・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	137
	2. 混合戦略・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	138
	3. 保険業・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	140
	4. 集合上のパラドックス・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	141
	5. 教育原理は宇宙の構造と調和しているか?・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	143
	6. エルブルース山の頂上ではうっとりする, そこに住まないうちは・・・・	147
		153
著者紹介		154

まえがき

退屈な人間だと思われたいのなら, すべてを語り尽くせ。

ヴォルテール

いかなる分野においても、人と人の間で口頭でコミュニケーションがなされるしかるべき場に出るということは、有益なものだ。そのような場では、机上の空論はもろくも崩れ落ちる。そして、本質的には何も変わらない場合もあるが、その代わり、正しい軌道にでくわした、ドグマから解放された、という気分が生じてくる。常に仮面をかぶっている科学にとって、これは特に重要なことだ。本質は背後に隠れており、眼前にはレースのカーテンが垂れ下がっている。だから、永遠に何かが不足している。足りないのは、あるいは単純さ、あるいは複雑さ、あるいは正確に定義しようのない何ものかだ。何かがどこかへ向かって元気に歩みを進めているというのに、君は道端に座り込んでいる。そして時間は人生について何も語らぬまま、むなしく過ぎ去っていく。

本書では、文字媒体をモデル化し、そこでは「覆いが落ちる」ように、状況を前進させようとする試みがなされる。本書の内容の輪郭は、目次からは多かれ少なかれ曖昧にしか見て取れないだろうが、本書の主たる標的は、その、背後に隠れているものなのだ。ベールを取れ、メーキャップを落とせ、装飾をはずせ。徹底的に単純化せよ、ちょっとぐらい尾ひれをつけてもいい。なぜなら、説明において何よりも重要なのは、真理の1回ずつの投与量を量り分けて、それを提示することなのだから。ディテールを詰め込み過ぎた説明の結果は、所要の場所にもぐり込むことができない。ひらめきは、計算が数100万に向かって進んでいるのに、はちきれそうになった頭が「2かける2」のレベルまで落ち込んだときに訪れる。弁証法とは、まさにそういうものだ。

本書の読者としては、きわめて広い範囲の読者が想定されている。しかし当然、それぞれの読者は自らの責任において行動しなければならない。本文のほぼ80%は中等教育レベルの知識に依拠している。各章はそれぞれ互いに独立している。理解できる部分と理解できない部分の割合は、人生におけるのと同じだ。

第1章 抽象化の渦巻

私は知っている―― 私における長靴に刺さった釘は ゲーテにおける想像力よりも悪夢的であることを。 **ウラジーミル・マヤコフスキー**

サハリンの先住民であるニヴフ民族は最近まで、丸い物と細長い物では異なる数詞を持っていた。「3本のキュウリ」と「3個のトマト」という2つの状況に共通点はない。我々にとっては、そんなことはまったく理解し難い。抽象的な数の概念は陳腐なことになっている。その概念が存在しないということを、世界観を構成するそのようなレンガの一つとして思い浮かべることはほとんど不可能である。それゆえ、今日、数の概念の深遠さと大きさについて語ることは難しい。既に誰もそれを理解していない。みんな、それに慣れただけなのだ。

しかし、現在のところまるでそれとは別の段階にあるかのような、それとは別の抽象化も存在する。抽象化の過程にあるのか、それともすべての人間がその抽象化と関りを持っているわけではないということなのかは分からない。だからここには、状況を新鮮な眼差しで眺める可能性がある。

1. 数体の染色体



ライプニッツ¹⁾, 1646~1716

初期条件を $a_0 = a_1 = 1$ とし,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \tag{1.1}$$

という規則に従って組み立てられた a, の数列

$$1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16, 0, -32, \dots,$$

を取り上げてみよう。

第n項の公式が必要とされているとしよう。

我々は今の時点では循環数列論には関心を持っていないので、単純に既成の処方箋を利用することにする。すなわち、第n項は $a_n = x^n$ と書けるので、これを(1.1)に代入すると

$$x^{n+2} = 2x^{n+1} - 2x^n$$

が得られる。これをxⁿで約分すると2次方程式

¹⁾ 本文の各所に掲げられている肖像は、創造主が数学の問題に頭を悩ませているときに示した様々な表情と理解される。それゆえ、自然選択の着想は全部まるごと人相学の領域から誕生したのだ。

$$x^2 - 2x + 2 = 0 ag{1.2}$$

となる。

この方程式を解き、2つの根 x_1 と x_2 を得て、

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

と置くと、これが(1.1)の共通解になる。定数 c_1 、 c_2 の値は初期条件($a_0=a_1=1$)から決定することができる。

実は、そのようなものとしての課題について語っているのなら、これで話はおしまいだ。 しかし、我々が関心を持っているのはそれとは別のことだ。

方程式(1.2)の根は複素数

$$x_1 = 1 + i$$
, $x_2 = 1 - i$

だから、 $a_0 = a_1 = 1$ の場合、 a_n に関する公式は

$$a_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2} \tag{1.3}$$

の形で、あるいは有名な三角関数の小細工を考慮すると、

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4} \tag{1.4}$$

の形で得られる。

というわけで、この課題は解決された。初期条件にも、(1.4) という答えにも、複素数の片鱗すら含まれていない。途中の計算はそうではなかった。そこでは虚数単位 i があちこちに姿を見せている。これは何だ? 手品や虚構なのか? それなしで済ませることのできるちっぽけなモデルなのか、それとも最初の課題が備えている本質的属性なのか?

最初に頭に浮かんでくるのは、これは虚構だ、補助的な手法だという考え方である。いわく、だから、複素数が実際に存在しているかどうかを解明することに特別の意味はない。 複素数は思考のツールとして存在している。これが真理の全体なのだ、と。

しかし、全体ではない。ここで問題なのは、複素数が与える便利さだけではないということだ。もちろん、複素数を使えば、例えば電気回路理論がどれだけ簡潔になるか、そしてその全体がどれだけ広く見渡せるようになるかをようやっと理解したとき、学生の心は喜びにはずむ。調和振動 $U(t)=U\cos\omega t$ への虚構的な虚部の追加、すなわち

$$\hat{U}(t) = U(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

は奇妙な仕方で、急激に理論を簡潔化する。それはまるで、様々な状況の幸福な重なり合いが見出されたかのようだ。電気の諸法則と複素数の乗法の規則とは、思いがけない一致を示す。

しかし、問題はそれよりはるかに深いところにある。公式 (1.4) が成立することを複素 数を抜きにして説明することは、一般的には不可能なのである。今言っていることは、ほ とんど誇張ではない。 別の例。級数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

$$\ln{(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

|x|<1のときにのみ収束するが、これは、左辺の関数における絶対値が|x|=1である特異点の存在によって説明される。しかし、級数

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots \tag{1.5}$$

 $\mathbf{b}|\mathbf{x}|$ <1のときにのみ収束すると、誰が言うだろうか? いかなる特異点も存在しないし、分母もゼロに近づいていかない.....。

しかし、それは実軸上でのことだ。特異点は複素平面上のx=i (|x|=1) に存在し、この点こそが天気を決定しているのである。

だから、虚数単位はまるで影のように、背後に常に存在している、ということになる。 虚数単位はあらわな形では干渉しないが、監視し、決定している²⁾。これは神秘か?

2. 神秘ではない

答えは単純でもあり、複雑でもある。単純なのは、容易に定式化され、しばしば繰り返されるからだ。複雑なのは、抽象数の具現化と相通じるところがあるからだ。「3本のキュウリ」と「3個のトマト」という2つの状況に共通性が存在することを解明するために、人類はきわめて長い時間を費やした。この場合にも、やはり時間が必要だ。もっとも、どんなに考えてみても、結局、それが何に費やす時間なのかは分からないのだが。

すべては自然数列,そして2つの演算,すなわち加法と乗法の導入から始まる。それ以外のものは蒔かれた種からひとりでに発生する。まず最初に自然な仕方で現れるのはそれらの逆演算,すなわち減法と除法である。それに伴い,数列

$$..., -3, -2, -1,$$

を, そして次に分数を導入する必要性が生じる。最初の操作対象

の拡張は、比較的痛みを伴わずに生じる。我々を取り囲む世界には、出来合いの解釈が豊富に存在するからである。ついでに言うと、それは悪いことだ。なぜなら、それは抽象化の不適切な源泉を発達させるからだ。負数に対する必要性には、マイナス記号による負債の表記よりもはるかに重大な理由がある。ここで何が問題なのかと言えば、それは、数の操作はある一定の段階に達すると、抽象化のその次のレベルに移行するということである。

²⁾ 我々の運命を決定しているのは、いかなる「虚数値」なのだろうか?

同一のタイプの様々な作用のために、シンボルによる表記法が用いられ始める 3 。文字記号の導入は算術を別のレールに移し替える。a-b=c あるいは

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

といったタイプの公式は、注意を操作に集中させる。対象(つまり、この場合は数)は注意の圏外、あるいは背後に留まり、視野から消える。作用が加わる対象ではなく、作用が最重要となる ⁴。それにもかかわらず、検討される操作が意味を持つためには、潜在的に存在し得る対象の集合は、非空集合でなければならない。方程式

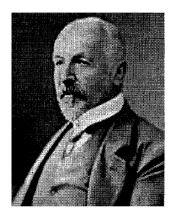
$$x+a=b$$
, $ax=b$

が常に解を持つためには、負数と分数が必要である。実は、これこそが主要な理由なのだ。 根の導出との関連においてもこれと同様の状況が生じ、このことが一意的に複素数の登場 をもたらす。表面的な見方をした場合、この道筋上には虚数しか登場しないように思える かもしれない。しかし、それはそうではない。始まった仕事は最後までやりとげなければ ならない。つまり、 $\sqrt{-1}=\pm i$ であるが、しかし \sqrt{i} は既に $\pm(1+i)/\sqrt{2}$ なのである。時々、n次方程式の可解性という論拠がこれに付け加えられることがあるが、それはもはや単なる 副次的効果にすぎない。

というわけで、いかなる秘密も神秘もない。複素数は、負数や分数と同じような現実(あるいは同じような虚構――もしこっちの言い方のほうがお好きなら)なのである。なんらかの不快感が生じるとしたら、その原因は、負数が自らの具現化を見出している温度計の目盛りといった類の原型を周囲の世界のうちに探し出そうとする、深く根付いた習慣以外にはない。

もし原型が見出されないと、素人だけでなく、玄人も不快感を味わう。これを裏づける鮮や かな実例は非ユークリッド幾何学の創出の歴史である。

一目瞭然たる原型が存在するにもかかわらず, その疑いのないものを受け入れることを従来 の経験が妨げるという, 別の図式も特徴的である。線分と正方形が同数の点を持っていること



カントール, 1845~1918

を発見したカントールはこう書いている。「私にはそれが見えている,しかし信じられないのだ」。彼はこの心理的な壁を克服するのに3年を費やした。

複素数の話に戻ると、さらに、複素数がきわめて多様な領域において突然表面化したのはなぜなのか、という疑問に答える必要がある。それは、数学全体は加法と乗法の利用の上に成り立っており、その加法と乗法にとって、複素平面は自然数列の拡張の不可避的なフィナーレである。それゆえ、無限級数の場

³⁾ これは思考における巨大な飛躍である。その飛躍のために幾世紀もの時間が過ぎた。

⁴⁾ これはちょうど、動詞を名詞から切り離して分析し始めるようなものだ。

合も、微分方程式の場合も、確率論の場合も、そのプレイグラウンドは同一なのである。

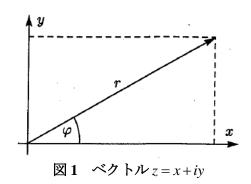
上記において指摘した実在する原型に対する人間の欲求は、同時に悪くもあり、良くもある。その欲求は、一方では明白な論理的構図を見て取ることを妨げ、他方では一目瞭然たるツールや構造の探索を活性化する。一方では、複素数とは、普通の加法則と乗法則によって条件 $i^2 = -1$ を満足する、

$$z = x + iy \tag{1.6}$$

の形を持った要素であって、これだけですべてが言い尽くされる。他方では、失望した潜在意識は一目瞭然性を探し求め、その結果、同値的に理解しようとする試みが生じる。例えば要素(1.6)は、極座標で

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

と書ける,座標x, vを持つ平面上のベクトルと対応させて考えてもいいはずだ(図1参照)。



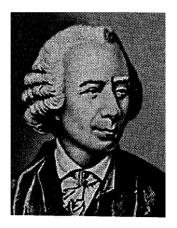
この着想は実り多いものであることが判明する。様々な状況の幸福な重なり合いにより、複数の数値の乗法の場合、複数の引数 φ は単純に足し合わされる。これはもうそれだけで既に大成功、何らかの標的に的中していることの証拠である。さらにこれにオイラーの美しい公式

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

がプラスされ、このことが成功を一層充実させる。

その結果, 複素数の集合に対してその幾何学的同値物である複素平面が対応づけられる。 そしてそこでは、多くの事柄がより単純でより分かりやすいものとなる。

3. 別のニッチへの突破口



オイラー, 1707~1783

自然数列0,1,2,…の段階的拡張は,負数,有理数,実数⁵, そして最後に複素数の出現を順次もたらす。その過程は,代 数的操作の実行可能性というイデオロギーの監督下で進行し, 一意的に複素数で終わる。その先に道はない。

当然のこととして、一つの疑問が生じる。では、自然数列ではなく、何か別のものから始めたらどうなるのか? 実は、その場合には、加法と乗法が何であるかが明白でなくなるのだ。しかし、その何か別のものが、

$$a(b+c) = ab + ac$$

といったタイプの同一の諸性質を満足する何らかの操作にな ると仮定しよう。また,諸性質さえもが別のものになると仮

定し、さらに操作の種類さえもがわずかに1つだけ、あるいは逆に3つ、4つ、…等々になると仮定しよう。こうして別のニッチへの突破口が生じ、抽象代数学が誕生する。

代数系の輝かしい例はベクトル計算である。

有向線分としてのベクトルは平行四辺形の法則に従って足し合わされる。これは、座標による表記

$$x = \{x_1, x_2, x_3\}, y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

では、普通の座標ごとの加法

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\}$$

を意味する。

乗法のバリエーションは2つある。**スカラー積**

$$xy = |x| |y| \cos \alpha \tag{1.7}$$

は、2 つのベクトルの長さに、それらの間の角度のコサインを掛けた積に等しい。もう 1 つは ベクトル積

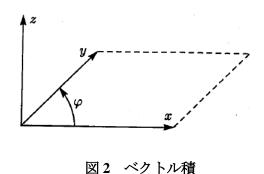
 $z = x \times y$

である。ここでベクトルzの長さは

 $|z| = |x| |y| \sin \alpha$,

すなわちベクトルx,y上に描かれた平行四辺形(図 2 参照)の面積に等しく,zの方向は「右ねじの法則」に従って決定される。

⁵⁾ 実数に関しては、ある小さなこじつけがある。一般的な言い方をすると、そこでは不連続性という外部から混入した着想(非代数的ウイルス)が導入されている。その結果、代数的数と超越数に関するありとあらゆる追加的な議論が後づけ的に生じることになる。



これら 2 つの乗法は、その性質が普通の数の積とはまったく似ていない。前者 (1.7) の場合、xyの結果はベクトルではなく、スカラーである。ベクトル積はベクトルを与えるが、しかし可換性はなく $(x\times y\neq y\times x)$ 、結合性もない $((a\times b)\times c\neq a\times (b\times c))$ 。 ただし、いずれの場合も分配法則が成り立つ。例えば、 $(x+y)\times u=x\times u+y\times u$ 。

ベクトル計算のスタート台についてのこの記述は、ごく小さな場所に収まるほどの分量 しかないが、革命にとっては、文字通りこれだけで十分だった。「ベクトル以前」の時代に はその証明のために何十頁も必要としていた多数の定理が、あっという間に証明されるよ うになった。全体的な見通しの良さ、視覚性が現われた。新たな課題の解決の幅広い可能 性が開けた。広大な研究領域が生じ、そこから沢山の結果がどっと流れ出てきた。

科学の発展の転換点は上に挙げた諸要因によって決定づけられる。通常、それらの要因は思考の新たなカテゴリーを土台として生まれてくる。ところが多くの人々はそれとは別の考え方をしており、数学の発展はフェルマーの定理のようなタイプの複雑な課題の解決に最も大きく依存しているとみなしている。それに応じる形で、若い人たちはそのような目標に努力を傾けている。しかし、うまくいった場合でも、労多くして功少なしということが稀ではない。複雑な課題が数学の発展の**重要な契機**となるのは、その解決が新たな進路の出現をもたらす場合に限られる。それでもやはり、新たな進路の発見は、1 つの課題ではなく、様々な原因の大集団をその源泉としている場合の方が多い。

数学の歴史の上で最も鮮やかな閃光は、どのような閃光だったのだろうか? 最初に頭に 浮かんでくるのは無限小の計算 (ニュートン、ライプニッツ) だ。数学のほとんど全体は その上に成り立っている。

きわめて典型的な例は、確率論に関するコルモゴロフの公理論である。本当のところは、何がなし遂げられたのか? 一見したところ、独自のものはないように見える。コルモゴロフが提案したのは、「これこれの」公理を土台として、確率論を測度論の一領域として構築するということだった。スタート台はこの場合もちっぽけなものだったが、そこからの帰結は壮大である。コルモゴロフの論文は過去何十年もの間、最も引用回数の多い論文の一



コルモゴロフ, 1903~1987

つになっている。何千人もの数学者がこの仕事に参加しており、 確率論のあばらやは摩天楼に建て替えられつつある。

そんな類のブレイクスルーは運不運の問題でしかないと感じている人がもしいるとしたら、その人はもっと先まで考えなければいけない。出発点となる最初の公準を創出するのにかかる原価は、とても高いのだ。そのためには、うまくいかなかった山のようなバリエーションを切り捨て、錯誤を回避し、大きな利益のために小さな利益を犠牲にし、……等々が必要とされる。表面に残るのは小ぶりな、何やらぱっとしない結果だとしても、それがその先の動き全体を決定するのである。

今述べたことを,最初の発見者たちの功績の過小評価だと考える人がいるかもしれない。いわく,何のためにスタート台の小ささを強調するんだ? それは,その小ささこそがその偉大さを物語っているからだ。なにしろ,数学の歴史の上で最も鮮やかな閃光は何かと言えば,それは,位取り記数法という小さな閃光だったのである。それは

$$a_n \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

というたったの1行だが、その結果はどうだ! もしローマ数字による記数法だったとした ら数学はどうなっていたか、想像してみてほしい。

注記と補足

1. 複素数については,より一般的な観点から眺めることが有益である。前回と同様,要素 z=x+iy について話をするが,ただし今回は, i^2 は-1 ではなく,あらかじめ与えられた任意の数 $\alpha+i\beta$ (これには-1 も含めることができる)と等しいという点だけが違っているとしよう。この系のいくつかのバリエーションが詳細に検討された。すなわち,**双対数** ($i^2=0$) と **二重数** ($i^2=1$) の場合である。ただし,複素数と双対数(あるいは二重数)にはきわめて大きな違いがある。

複素数が数学の本道上に位置しているのに対し、双対数と二重数は狭い応用部門でのみ関心 を引いている小さな枝道でしかない。

2. ハミルトンによって発見された超複素数(四元数)は,

$$Z = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$$

の形の 4 次元の対象物である。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は実数である。1, i, j, k は 4 つの基底単位であり,これらは

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

という関係を満たす。ここから(1が普通の1であることを考慮して)次のことが導き出される。

$$ij = -ji = k$$
, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$

四元数は複素数を一般化したものとみなされていることがあるが、これは望ましいものを現 実と偽ろうとする試み以上のものではない。複素数体の拡張は、あれこれの算術的性質を失う ことなしに行うことができない。例えば、四元数の積は非可換である。

3. ベクトル計算のやり方を知ると、最初のうち、多幸感がもたらされることが稀ではない。 難しい幾何学の課題がすらすら解けるようになる。教科書にはそういう課題の大きなコレクションがある。

ここでは、我々は平行四辺形の規則による回転の合成という事実についてだけ論じることにする。この話はまったく非自明な話で、意外ですらある。特に、3次元の回転が可換ではないということのを考慮した場合、そうである。

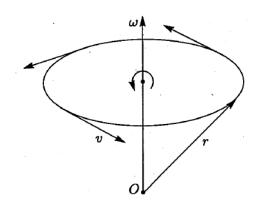


図3 回転はベクトルとしての本性を持っている。

それでもやはり、 R^3 における回転は、実際にベクトルとしての本性を持っている。標準的な運動学的証明はいささか長ったらしく、しかも空間的な想像力に依拠している。ベクトルのツールを利用した場合には、考える努力はほとんどいらない。動径ベクトルrが座標原点0を通る軸の周りを角速度 ω で回転するとき、その終端の周速度vは

$$v = \omega \times r \tag{1.8}$$

である。ここでベクトル ω は、(とりあえず形式的に)回転軸の方向(「右ねじの法則」に従って決定される側、図3参照)を向いている。ちなみに、これはきわめて有益な公式だ。

物体が ω_1 と ω_2 の2つの回転に関与している場合には、それらの線形速度

$$v_1 = \omega_1 \times r \quad \succeq \quad v_2 = \omega_2 \times r$$

は合成される。それらの合成速度は

$$v = \omega_1 \times r + \omega_2 \times r = (\omega_1 + \omega_2) \times r$$

となり、これが求められている結論を与える。合成された運動はベクトル角速度 $\omega=\omega_1+\omega_2$ で生じる。

⁶ 無限小回転は可換であり、まさにこのことが R^3 におけるベクトルの性質を決定している。

第2章 原因を突きとめようとして

遠くへ向かって歩き始めるのは、どこへ行くべきかを知らない者だ。

XYZ 1)



ニュートン, 1643~1727

ニュートン以前の時代,天文学は大混乱の状態にあった。互 いに矛盾し合う諸事実や諸理論,答えの出ない「なぜ」……。

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{2.1}$$

というたった一つの公式が天文学と力学全体を一変させたとき、 その背景をなしていたのはこのような状況だった。無数の「な ぜ」が合流して一つになった。それはまるで、天文科学のアモ ルファスな塊が突然結晶化したかのようだった。それぞれの事 実は(2.1)と整合する位置を占めた。ケプラーの「神がかった」 法則は当たり前の帰結であったことが判明した。統一的な秩序が 生まれた。

これは、科学が原因に向かって動いていく際の状況を示す良い例である。もちろん、この例は歴史的なスケールのものである。しかしミクロレベルにおいても、これに類する動向には興味深い点がある。奇妙なことに、課題の解決に際して重要なのは、結果ではなくて、結果に到る方法なのだ。

1. 2つの課題

平面P上に相異なる半径の3つの円が配置されている。それらの配置の特徴は図4に示されている。円のそれぞれの対の共通接線は点A,B,Cで交わる。A,B,Cは1 直線上にあることを証明せよ。

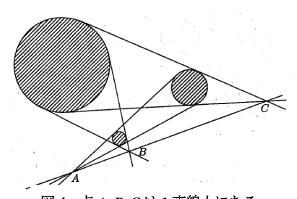


図4 点A,B,Cは1直線上にある。

¹⁾ 諸般の事情により、著者 XYZ の名前を挙げることはできない。

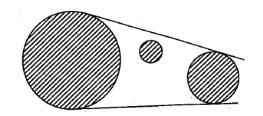


図5 我々はこのような状況については検討しない。

「一度に接触させる」という課題は、空間モデルが解決してくれる。最初の3つの円と同じ半径の3つの半球をそれぞれの円の上に置く。3つの半球の共通接平面Kは平面Pとある直線に沿って交わるが、点A,B,Cはその直線に属していなければならない。

このような状況では、普通、解法の巧みさや独創性について語るものだ。しかし、それ とは別の点にもっと大きな注意を向ける必要があるのではなかろうか。この解法は課題の 本質を明るみに出している。この解法の主たる価値は、この点にこそあるのだ。重要なの は解法の簡潔さそれ自体ではない。根源や原因を見つけ出すことなのである。

この課題の設定において、我々は図5に描かれているようなタイプの状況を避けていることに注意しよう。もちろん、あらゆるバリエーションについて語ることは可能だが、そうすると我々は、どこへ行くべきかを忘れてしまうかもしれない。風呂屋へ行く道の途中で気分が変わって、ソチ旅行に出かけてはならない。

4機の宇宙船A, B, C, D が,それぞれ固有の一定速度で厳密に直線的に運動している。 どの 2本のコースも平行ではなく,どの 3本のコースも 1 点で交わらない。A, B, C は既に 互いの間で 1 対ずつ出会ったこと,また D は既に A および B と出会ったことが知られて いる。D は C と出会うことを証明せよ。

もちろん,直線運動の方程式を書き出し,それらを解析し,……等々することは可能だ。 半リットルのインクを消費すれば,成功は保証されている。しかし,ここから何が汲み取れるかについての理解においては,いかなる明快性も生まれてこないだろう。

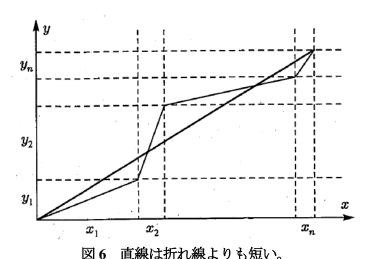
別の見方をすれば、この課題は透明になる。宇宙船A, B, C, D のすべてのコースは交わるのだから、当然、それらはある平面P上にある。平面Pに対して垂直な時間軸tを取り、3 次元空間 $\{P,t\}$ 中で宇宙船の運動のグラフを描いてみよう。それらは 4 本の直線になる。それらを同じ文字A, B, C, D で表すことにする。宇宙船A, B, C は1 対ずつ出会うのだから、それらに対応する直線A, B, C はある平面Q上にある。条件によれば、直線D は直線A およびB と交わる。ゆえにその 2 つの交点は平面Q 上にある。すなわち、全体がQ に属している。したがって、(非平行性により)直線D はC と交わる。証明終わり。

2. 本当の根っこはどこだ?

これまでに検討した例は、数学の問題の本当の根っこは、簡潔で明快な解法がある場合 に見出されるのだという考え方へ我々を押しやる。もちろん、そこには真理の何分の一か はある。例えば、不等式

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \ge \sqrt{(x_1 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + \dots + y_n)^2}$$
(2.2)

は様々な方法で証明することができる。例えば図 6 は, (2.2) の根拠をまあまあちゃんと 捉えているかもしれない。この図は,この場合に問題になっているのは,線分の長さは同 じ点を結んでいる折れ線の長さよりも短いという,単純な幾何学的事実だということを示 している。



ところが、別の種類の例がある。コーシー-ブニャコフスキーの不等式

$$(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$
(2.3)

は幾何学的にエレガントかつ単純に証明される。さて,

$$(x_1 - \lambda y_1)^2 + \dots + (x_n - \lambda y_n)^2 \ge 0$$

であることは明らかである。括弧を開くと

$$\lambda^{2}(y_{1}^{2} + \dots + y_{n}^{2}) - 2\lambda(x_{1}y_{1} + \dots + x_{n}y_{n}) + (x_{1}^{2} + \dots + x_{n}^{2}) \ge 0$$

となるが、これが任意の λ について可能なのは、判別式が非正である場合のみである。そして、それが(2.3)に他ならない。

上に挙げた標準的な証明はエレガントで簡潔ではあるが、(2.3) が主張している内容の本質に対していかなる特別の光も当てていない。コーシー-ブニャコフスキーの不等式の本質は、それとは別のところ――n 次元幾何学の基本的事実の記述――にある。すなわち、その本質とは、ベクトル

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}$$
 \succeq $y = \{y_1, \dots, y_n\}$

の間の角度 α のコサインは1より大きくないということ、つまり

$$\cos \alpha = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}} \le 1$$
 (2.4)

であるということなのである。この場合, (2.3) が (2.4) から導き出されるのか, それとも逆に (2.4) が (2.3) から導き出されるのかは重要ではない。重要なのは, (2.4) の解釈が不等式 (2.3) をそれにとって自然な環境に移し入れ, それによって (2.3) が, それと性質の似通ったそれ以外の沢山の諸事実と響き合い始めるということなのだ²⁾。

この例は別の考え方へ我々を押しやる。最も重要な役割を演じているのは解決方法では なくて、そこでは数学的事実が最大限の有意義性と生産性を持つことになるような、解釈 の仕方なのである。

ここで検討した例においては、「真の本質」は幾何学的なものであることが判明した、ということになった。実際、それは広く流布しているバリエーションだ。それは多分、物理的世界においては視覚的経験が重要な役割を果たしているからだろう。例えば、行列式は様々な方法で同値的に定義されるが、学生は、行列式とは(符号を除けば)列ベクトルまたは行ベクトルで作られた平行6面体であることを知ると、安堵感を覚える。視覚的形象が知覚に結びつき、その結果、明瞭性の感覚が生じるのである。

概念と作用の代数化に多くの点で恩恵をこうむっている解析幾何学でさえ、通常、記号操作が首尾よく終わった後は、一歩後退して、それらの記号操作に視覚的な解釈を与えようとする。

言うまでもなく,数学的事実の真の本質は必ずしも幾何学的とは限らない。例えば,線形微 分方程式系

$$\dot{x} = Ax \tag{2.5}$$

が安定的であるためには行列Aの固有値の実部が非負であることが要求されるのはなぜなのかを理解するためには、(2.5)の解の表記

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

に直接取り組むのが自然なやり方である。

無論そのためには、特殊なカテゴリーの思考の事前訓練、またそれに慣れるための何らかの 段階が必要とされる。この点では、幾何学的解釈はアプリオリのようなものとして与えられ、 通常、初心者に対しても説明しやすいという長所を持っている。

²⁾ 普通, (2.3) を (2.4) から導き出す者はいない。なぜなら, その場合には「頭痛」がある部位から別の部位に転移する――つまり, (2.4) を何とかして別のやり方で証明しなければならなくなるからだ。

3. 対称性の謎

この文脈において確かに興味深いのは,正多面体の数に関する問題である。 まずあらかじめ,オイラーの多面体定理

$$V - R + G = 2 \tag{2.6}$$

を証明しておこう。ここでVは検討されている任意の多面体 3 の頂点の数,Rは辺の数,Gは辺の数である。

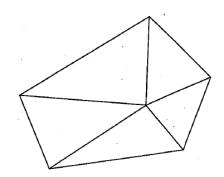


図7 平らに引き伸ばされた多面体

多面体の弾性体モデルを採用しよう。多面体の1つの面を引っ張って伸ばし、その面の上にそれ以外の面を収める。その結果、平面グラフ――図7に描かれている1種の図形――が得られる。最も単純な多面体(グラフ上で内部頂点のない多面体)の場合、V=R=n、G=2であり、等式(2.6)は正しい。この先は帰納法が解いてくれる。(2.6)が G 個の面を持つ任意の多面体について正しいとすれば、さらに1個の頂点の追加(図8参照)は新たな多面体を与え、その頂点数はV'=V+k(ここで k は新たな頂点の数)、辺数は R'=R+k+1、面数はG'=G+1となる。ゆえに

$$V'-R'+G'=V-R+G=2$$

となり、これによって証明が完成する。

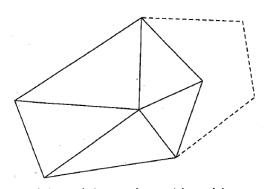


図8 さらに1個の頂点の追加

³⁾ 非正多面体でもよい。

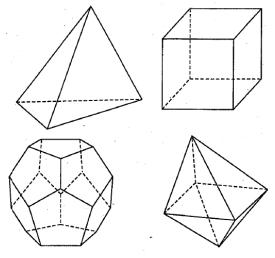


図9 正多面体

さて今度は、正多面体の場合に取り掛かろう。正多面体は、各頂点に同数のK個の辺が集まっており、同数のN個の辺が各面の境界をなしているという特徴を持っている。このとき、

$$N \cdot G = 2R$$
, $K \cdot V = 2R$

となることは明らかである。正多面体の辺の数え上げは、NG の考え方を用いた場合も、KV の考え方を用いた場合も、いずれも 2R を与える。いずれの場合も各辺が 2 回数えられているからである。したがって

$$\left(\frac{2}{K} - 1 + \frac{2}{N}\right)R = 2$$

でなければならない。あり得るすべての解は、単純な数え上げ ∜によって容易に決定される。数え上げ法は次の結果を与える。

$$K=3$$
, $N=3$ — 正4面体

$$K=3$$
, $N=4$ 一 立方体

$$K=3$$
, $N=5$ — 正 12 面体

$$K=4$$
, $N=3$ — 正8面体

$$K=5$$
, $N=3$ — 正 20 面体

このような解をどう評価するべきか? 感嘆符つきで眺めるべきかもしれない。なにしろ、かなり複雑な(そして秘密めいてさえいる)課題が簡潔、明快に一目瞭然たる形で解かれているのだから。ただし、ここには2つの「しかし」がある。

$$\frac{2}{K} + \frac{2}{N} > 1$$

の整数解を決定するということに帰着する。

 $^{^{4)}}$ この数え上げは、K.N>2 という自明な制約条件の下で、不等式

いけないのは、結果の深遠さという感触が残っていることだ。まるで、神秘的な後光の 正体が暴露されていないかのように感じられる。それは、通常、まだ謎が解かれていない メカニズムや隠れたゼンマイが存在していることを物語っているのだ5。もう一つの欠点。 結果はスマートだが、しかしそれだけが他から離れて孤立しており、他の何ものとも響き 合っていない。そこにはいかなる宇宙の法則性も反映されていない(そうでなければなら ないと思われるのだが)。

まったく別のアプローチがこの課題に新たな光を当てる。正多面体は、さらに、そのある運 動,つまり空間中における回転が自らとの重なり合いをもたらすという特徴も持っている。そ のとき、そのような複数の回転は群を形成する。

 R^3 における回転は、常に何らかの軸の周りの回転である。回転群が論じられている場合には、 $a \circ b$ は、まず回転 a が、次に b が順に行われることを意味する。既にオイラーが証明したよう に、それもやはり一つの回転である。

叙述上の強調点のバランスを崩さないようにするため、詳細には立ち入らない。以下、この 主題は大体そういう図式に従って展開されることになる。回転群の中で、ある対称群が自然な やり方で抽出される。正多面体の存在には対称群の存在が伴う。さて次に, *R*³においては, 今 検討されているタイプのいかなる対称性があり得るのか、という課題が立てられる。それらは たった5つしかない(正4面体、立方体…の群)。——それで、さっきの解が得られたのだ。

自分が今から何をしようとしているのかを絶えず説明してくれる良き歯医者の例にならい、 次のことを述べておこう。我々の標的は,ある種の一般的な見地,とでも言えるものだ。それ を得るためには、数学的な詳細は本質的な重要性を持たない。上に示した対称群の決定と探求 の道には、けっしてバラの花はまき散らされていない。その道は今までの道よりもっと長く、 もっと骨が折れる。だから今は、そんな道を進んで行くべきいかなる理由もない。ただし、そ の道の外的な属性は注目に値する。というのは、そこには、すべてのマイナスを帳消しにする ような1つのでっかいプラスが存在するからである。上に述べた解決方法は、この課題を、類 縁関係にある諸事実の群論的環境の中に移し入れる。この課題は,もはや孤立していない。こ の課題から、多数の実り豊かな関係が見出されるようになる。例えば、正20面体群(図10参

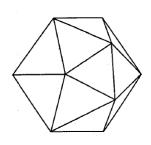


図10 正20面体

照)は、根基における代数方程式の可解性の問題と密接な関係を持 っていることが判明する。ガロアは、この群が単純群(それ自身の 正規部分群を持たない群)であり、このことが 5 次以上の方程式の 非可解性をもたらしていることを発見した。

⁵⁾ 人間の場合もそういうことがある。例えば、身上調書を提示して自分の経歴を語ってくれた が、いったいどういう人物なのか判然としない、といったように。

注記と補足

1.4次元空間には6つの正多面体が存在する。それより大きい次元の空間には3つの正多面体,すなわち単体 (n次元の正4面体),立方体,および立方体と**双対**な正多面体(正8面体のアナロジー)しか存在しない。

2. 正 20 面体と正 12 面体は(正 8 面体と立方体と同様に),互いに双対である。すなわち,正 12 面体の 5 角形の面の中心は正 20 面体の頂点であり,正 20 面体の 3 角形の中心は正 12 面体の頂点である。正 4 面体はそれ自身と双対である。

3. 力学には次の定理がある。すなわち、0点に対する力の合成モーメント

$$L_0 = r_1 \times F_1 + \dots + r_n \times F_n$$

は、合成モーメント L_c と、点 C (この点は動径ベクトル r_c を持っている) に対する合成力のモーメント

$$F = F_1 + \cdots + F_n$$

とを足し合わせたものと等しい, すなわち

$$L_0 = L_C + r_C \times F \tag{2.7}$$

であるという定理である。

この定理の細かいところが理解できなくても、それは重要なことではない。今話しているのは別のことだからである。ベクトル計算の領域では、公式(2.7)は1行に収まる。実際、

$$L_C = (r_1 - r_C) \times F_1 + \dots + (r_n - r_C) \times F_n = L_0 - r_C \times F$$

となる。

「ベクトル以前」における証明は 100 頁以上の長さを持っていた! そしてその災厄は, いっぱい書かれていることではなかった。災厄は, 木々の向こうに隠れて森が見えないということだった。すべては霧の中, ぼんやりとして見通しがきかない。

この例は一般的な法則性を描き出している。それぞれの数学的事実は、まるである特定の畑に属しているかのようだ。そこではその事実の本質や諸関係がよく見え、しかも最も重要なのは、その事実が直観的理解にとってアクセス可能になるということだ。その事実は他人の畑でも徘徊することがある――ただし、仮面をかぶり、切り縮められた姿で。まさにこのような実物大模型は深遠さの印象を生み出し、「知識」には秘密のフロアがあるのではないかという、漠然とした疑念を呼び起こす。

その場合,真理を突きとめるとは,研究している事実がそれにとって自然な環境と巡り合える無人地帯へのトンネルを掘り抜く,ということを意味する。

第3章 催眠術と連想の魔術

- ――どうした,ふさぎ込んだ顔して?
- ――催眠療法を受けてみろよ、きっと治るから。
- 一週間後。
- ――ずいぶん元気そうだな。催眠術、効いただろ?
- —もちろんさ。相変わらずおねしょはしてる。でも俺、今はそれに誇りを感じてるんだ。

小話



デカルト、1596~1650

17世紀,ルネ・デカルトは座標での代数的記法を用いて幾何学的課題を解くための効率的な方法を発見した。現在,それはデカルト座標と呼ばれている¹⁾。例えば, *R*³中の平面は

$$ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha (3.1)$$

の形の方程式で記述される。ここで平面を「与える」ベクトル $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ は平面に対して垂直であり、(3.1)を満たす点の集合 $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ は平面自体を表している。代数的同値物は線、長さ、角度、球面、等々の場合も与えられる。その結果、幾何学的対象と代数的対称の間に互いに一意的な対応が生まれ、このことが操作の自由性を保障する。そして、代数と幾何学のど

ちらがより大きく勝っているのか,この段階でもう既にはっきりしなくなっている。例えば、方程式系

$$ax = \alpha$$
, $bx = \beta$, $cx = \gamma$

の可解性に関する問題は、3つの平面の交わりに関する課題として考察すると具合がいい。「記号形式」で与えられている多数の課題を、その幾何学的同値物を想像しながら考えることが可能になった。例えば、関数 $y=f(x_1,x_2)$ は、3次元空間中でそのグラフ、すなわちある表面を脳裡に描きながら考えるのが有益である。当然、まさにここで、こんな疑問が浮かんでくる。それより多数の変数の場合にも幾何学的直観を働かせてはいけないのだろうか?

¹⁾ 原則として、我々は歴史的な詳細について確かめることは避ける。そこでは沢山のことがひどく混乱しているので、カオスをさらに広げたくないからだ。例えばこの場合には、座標による記述という着想は、既に古代エジプト人において見られる。この着想が体系的な形で発展させられ始めたのは、P.フェルマーと R.デカルトによってであった。I.ニュートン、G.ライプニッツ、またおそらく、今は忘れ去られたその他数多くの人々もその発展に貢献した。

1. n次元の特殊性

2次元と3次元の空間 R^2 , R^3 が存在するのなら,どうしてn次元の空間 R^n について検討してはいけないのか? 形式主義者は,そもそも数学というものは物理的世界とはいかなる関係も持っていない以上,そこにはいかなる問題もないと言うだろう。いわく,数学は定義とゲームの規則を与えるだけなのだから,数学にとっては R^2 だろうと R^2 だろうと変わりはない,と。それはもちろん真理だが,真理のすべてではない。数学について何を語ろうと,あらゆる理論の中には様々な解釈の不純物が存在し,3次元空間における人生経験の存在がその理論に刻印を押しているのだ。

n>3の場合における R^n の幾何学を検討することには、無論、いかなる支障もない。しかしそれが空虚な練習問題にならず、幾何学的直観と対応するようにするためには、準備作業が必要である。その作業は一歩、また一歩となし遂げられた。n 個の変数の空間において、平面、長さ、角度、体積、等々が定義された。「記号形式」での解析の結果、それらが普通の幾何学的理解と対応していることが確定された。法線、面積、等位面の概念に依拠しながら多変数の方程式や関数について考察することが、次第におなじみとなっていった。その際、ある者は、自分は3次元のアナロジーで考えているのだと言う。またある者は、自分にはn次元空間が「見える」のだと主張する。このことそのものは、もはや感情の領域に属する事柄であり、原理的な意味は持っていない。重要なのは、幾何学的想像力が持つ創造的ポテンシャルは、幅広い種類の課題とつながっている、ということだ。

何年もこの課題に取り組めば、通常、 R^4 は、一般的な場合には R^2 や R^3 とそれほどひど く異なっているわけではないということが納得できるようになるだろう。

しかし違いはある。 R^4 では、鎖状に連結した 2 つのリングを、リングを切断せずに分離させることができる。ループ上の結び目を解いたり、普通の球面を切断せずに裏返したりすることもできる。おなじみの物体の挙動にもあるアノマリーが存在する。単位立方体(辺の大きさ 1、体積 1)は、n が増加していくとその大きさが限りなく増加し、(主対角線上の)向かい合う頂点の距離は \sqrt{n} になる。n が大きくなると、球体の体積は赤道付近に集中し、単位球(半径 1)に内接する立方体の体積はきわめて急速に減少し、 $V_n = \left(2/\sqrt{n}\right)^n$ になる。この不協和音は、次の例に鮮やかに現われている。

図 11 において、辺の大きさが 4 の正方形は 4 つの同じ正方形に分割されており、そのそれぞれに単位円 (R=1) が内接している。中央の領域には半径 r の円が内接しており、それ以外の各円と接している。明らかに $r=\sqrt{2}-1$ である。

これと同様にして、 R^3 においても辺の大きさが4の立方体を8つの同じ立方体に分割し、 そのそれぞれに単位球を内接させる、等々のことを行うことができる。、 R^3 においては中央の内接球の半径は $r=\sqrt{3}-1$ となる。容易に見て取れるように、 R^n では

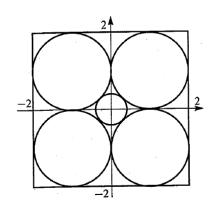


図 11 n=5 以降,「小球」の半径は「大球」の半径を超える。

となる。なぜなら、 r+Rは任意の n のとき、単位立方体の長い方の対角線、すなわち $r+R=\sqrt{n}$ を与え、R=1であるからである。

したがって内接球はn=10以降, それに外接する立方体の範囲からはみ出ることになる。 n=5以降, 「小球」の半径が「大球」の半径を超えることは言うまでもない。

しかし、これはごくありふれた「突飛さ」にすぎない。 R^n においては、それとはまったくスケールの異なる意外性に出くわすのだ。

2. 魔物ではないか?

そのそれぞれ 2つの頂点が 1 つの辺で結ばれている凸型多面体に関する課題について検討しよう。そのような多面体が持つことのできる頂点の最大数はいくつか? 平面 R^2 上でそのような性質を持っているのは 3 角形のみで,頂点の最大数はm=3 である。 R^3 においては,それは 4 面体(図 12 参照)(m=4)である。4 次元以上の空間では,そのような多面体はいくらでも好きなだけの頂点を持つことができる!

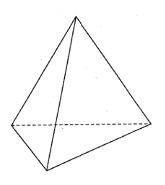


図 12 4 面体

これはもう既に質的な意外性だが、この話は、直観的にまったく受け入れがたく思われるようになるように展開することができる(この先を参照のこと)。

今はまず, 証明について述べる。 曲線

$$x(\tau) = \{\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4\}, \quad \tau \ge 0$$

の上にある任意の数の頂点を持つ、 R^4 におけるいわゆる**巡回多面体**について検討しよう。曲線 $x(\tau)$ が持つ驚くべき性質は次の点にある。すなわち、任意の2点x(t), x(s)を通る平面H(今は R^4 の話をしているのだから、この場合は3次元の平面)を、

それ以外のすべての点 $x(\tau)$ が H の片側にのみ存在することになるように描くことが可能なのである。

そのことを示そう。関数

$$\varphi(\tau) = (\tau - t)^2 (\tau - s)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \alpha_4 \tau^4$$

について検討し、平面 H としては $hx+\alpha_0=0$ である点x の集合を取ることにしよう。ここで $h=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ であり、

$$hx = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4$$

である。

明らかに、 $hx(\tau) + \alpha_0 = \varphi(\tau) \ge 0$ である。すなわち、すべての曲線 $x(\tau)$ は H の片側に存在する。さらに、 $2 \le x(t)$ 、x(s) のみが平面 H 自体の上にあり、

$$\varphi(t) = \varphi(s) = 0$$

であることも明らかである。

あとはもう, 多面体とは, その頂点, この場合は点

$$x(\tau_1), \dots, x(\tau_n) \tag{3.2}$$

の包絡面であることを思い出すだけでいい。H タイプのすべての平面は、普通言われるとおり、**支持平面**である。それゆえ、(3.2) の任意の 2 点を結ぶ線分は、多面体 M_c の辺となる 2 。

n>4の場合における同様の例は、上に与えられていることから容易に得られる。頂点としては任意のm個の点を取ることができ、それらの頂点において、最初の4つの座標は(3.2.)の点の座標と一致する。

意外性の効果は、今検討した例においては若干ぼやけてしまっている。そこでのシナリオが、感知可能な経験を我々が持っていない 4 次元空間で展開されているからだ。懐疑的な人は、 R^4 で生じることだけでは足りないのか、と言うかもしれない。それゆえ、このシナリオの筋書きを普通の R^3 に翻訳する作業は、頭をちょっと緊張させるに値する作業になるだろう。

次の問題に取り組もう。 R^3 において, 2次元の境界に 1 対ずつ接することのできる凸多面体はいくつあるか? R^2 における同様の問題は,図 13 に描かれている自明な解を持っている 3 。答えは,最大で 4 つのである。ところが R^3 においては,そのような多面体は**いく**

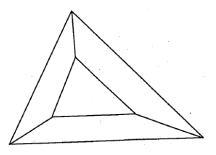


図13 1対ずつ接することのできる凸多面体はいくつあるか?

 $^{^{2)}}$ x(t) と x(s) を結ぶ線分は、その全体が H 上に横たわっており、したがってその線分のどの 1 点も、(3.2) のそれ以外の頂点の凸結合として得られるということはあり得ないことは明らかである。

³⁾ もちろん、平面における多面体とは、多角形である。

らでも好きなだけ存在することができるのである。これはあり得ない話のように思える。 しかしそうなのだ。

巡回多面体 M. のモデルを使えば、これに対応する例をきわめて容易に構築することが できる。

任意の $y \in M_c$ について $xy \le 1$

という不等式を満たす点 $x \in R^n$ からなる多面体 M_c^* は、 M_c と双対関係にある。

言うまでもなく, ここは双対性についての詳しい説明を始めるべき場所ではない。それ に、理解してもらうためにはヒントだけで十分なのだから。R"における双対多面体におい ては、出発点となる多面体Mのそれぞれの頂点に対応しているのは、(n-1)次元の面であ り(またこの逆も成り立つ)、それらの面は、Mのそれらに対応する頂点が1辺によって 結ばれている場合には、(n-2)次元の面に接している。図 14 には、互いに双対な多面体 である立方体と8面体が描かれている。

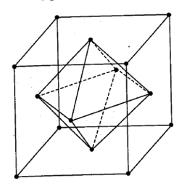


図14 立方体中の8面体

このように、多面体 M_c^* の境界とは、平坦な面 [flat face] に 1 対ずつ接している 3 次元凸 多面体の総体なのである。ただし、これは今はまだ、問題が最終的に解決したことにはな らない。なぜなら、 M_c^* の境界は R^3 ではなく、閉じた3次元多様体だからである。

最後の一歩は2つの方法で進めることができる。第1の方法: M_c^* の3次元面を引き伸 ばし、その上に残りの面を寝かせる。この種の方法は4次元空間における思考上の変形に 依拠しているので、気に入らない人がいるかもしれない。では、もっと形式的な方法を紹 介しよう。 M_c^* はm個の3次元面を持っているとする。 R^4 をm個の錐体に分割しよう。す べての錐体は M_c^* の内部にある頂点Oを持ち、それぞれの錐体は3次元面のうち、完全に 正確に1つを含んでいる。

1対ずつ接し合う m 個の 4 次元錐体の例が得られる。それらの錐体の (0 を通過しない) 任意の平坦な3次元断面において、1対ずつ接し合う(m-1)個の3次元多面体の例が生じ る。

第4章 陳腐な事実の深遠さ

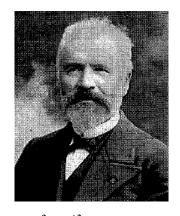
鍋の上の熱い蓋は、冷たい蓋と同じように見える。

XYZ

あらゆる科学はその基礎においては単純である。しかし、科学で飯を食っているすべての人間が、この事実を暴露することを必ずしも好んでいるわけではない。それで彼らは、しかるべく物事を行っているのかもしれない。なにしろ、門を開けっぱなしにしていてはならないのだから。それゆえ、芸術におけるのと同様、数学にもそれ独自の小さな策略が存在する。その策略は身内で用いるというより、むしろ、部外者に対して用いることを用途としている。混雑しないようにするためだ。

別の面から見ると、部外者用のいかなる策略も存在しないようにも思われる。細部の厳密化は自動的に、最初の単純さをしっくいの厚い層の下に塗り込める。よそ者だけでなく、 身内の人間たちにも理解できなくなる。

1. 共通の境界を持つ 100 万の領域



ジョルダン, 1838~1922

単純閉路は平面を内側と外側の2つの領域に分けるという,有名な**ジョルダンの定理**について検討しよう。ここで「分ける」とは,その単純閉路と交わらないような連続曲線によって内部の点と外部の点を結ぶことができない,という意味においてである。ちなみに,その証明は非常に長くて難しい――いったいここに,証明すべき何があるのか?と思えるにもかかわらず。すべては明白だ。しかし,すべてではない。ジョルダンの定理は,人の注意をそらすトリックなどではまったくない。この定理の役割は,適切な文脈においてのみ正しく評価することができる。

次の問題に取り組もう。平面上の 3 つの領域は、共通の境界を持つことができるか? ――共有点や共有区域ではなく、同一の境界を。言い換えると、何らかの集合 Γ は平面を 3 つの領域に分けることができるか? それらの領域は相異なるが、境界は同一でなければ ならない。まるでたわ言のようだが、答えはイエスなのだ。そしてこのことは、ある意味で有益なショックを与える。幾何学的直観がノックアウト状態に陥るからだ。しかも、これに対応する例はきわめて容易に構築することができる。

Cという海の中に1つの島があり、島にはAとBの2つの湖がある(図15参照)。島の陸地部分(斜線部分)において、正方形の ε 格子の結節点に配置された点の集合 M_{ε} を分

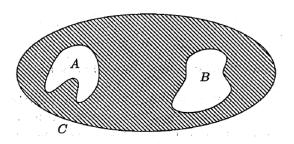


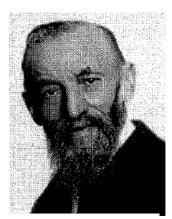
図 15 100 万の領域は同一の境界を持つことができるか?

離する。次に、それぞれの湖および海から M_s の各点に向けて運河を掘削する。その際、 運河はその点まで到達させず、そこから $\varepsilon/2$ だけ離れた所まで掘る。

陸地の残りの部分に $\varepsilon/2$ 格子を置き、集合 $M_{\varepsilon/2}$ の各点に向けて運河を掘る。その際、運 河はその点まで到達させず,そこからarepsilon/4だけ離れた所まで掘る。次に,陸地をarepsilon/4格子 で覆い,……等々と続けてゆく。領域 A,B,C が増大してゆき,その極限において,共通の から残るすべてである。

こんな意外な状況になった。それだけでなく、そもそも最初から100万の湖を持つ島を 取ることができたわけで、そうすれば**共通の境界を持つ 100 万の領域の例**が得られたはず である。

ここでの境界は単純閉路ではないことは明らかである。しかし、この例はそれでもやは り強烈な印象を与える。そしてこの例を背景としたとき、ジョルダンの定理は別の色合い を帯びることになる。



ペアノ, 1858~1932

しかし、この話はまだ終わりではない。ジョルダンの定理で 論じられているのは単純閉路、すなわち、両側に向かって相互 に一意的な円の連続像である。連続性とは、多くの人が望んで いるほど明白なものではけっしてない。連続関数 $y = x \sin(1/x)$ のグラフは描くことができない。ゼロにおいて連続な関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x が 有理数のとき) \\ x & (x が無理数のとき) \end{cases}$$

のグラフはいたるところ穴だらけで、そのグラフを通り抜けな がら「ぶらぶら歩き」することができる。線分はそのグラフと 交わることなく、いともたやすくそこを貫き通ることができる。 ここにさらにペアノ曲線りを加えると、ジョルダンの定理は自

明というより、むしろ疑わしく見えてくる。もし単純閉路を円の連続像と理解した場合に は、そもそもこの定理は正しくなくなるはずである――その場合には、例えば、単純閉路

 $^{^{1)}}$ ペアノ曲線とは, 正方形の内部全体を埋め尽くす曲線の断片の連続像(x(t),y(t)), $t \in [0,1]$ で ある。興味深いことに、単純弧(線)x=x(t)、y=y(t)、z=tは、連続面ではないのに、任意 の垂直射線へ向かう(zに沿った)経路を遮断する。

は平面全体を埋め尽くし、内部のためにも外部のためにも場所を残さないはずである。しかし、ペアノ曲線は必ず自己交叉し、このことが希望を保ってくれる。我々が今論じているのは、円の同相像であるからである。ただし、この文脈においては、ジョルダンの定理は楽観的な見方を抱かせることをやめてしまったという点にはご同意いただきたい。

潜在意識がここで直面した困難は一般的な本質を持っている。20個,30個の事例が合流して単一の概念を形成するときには、それより後に初めて知ることになる個別的事項やディテールの広大無辺な領域が、その概念の焦点部分に入り込んでくる。今の場合、連続性の概念はそのようなものである。

2. 選択公理

深遠なるものは、一見したところごくたわいのない状況において自らを知らしめる。上っ面をなでているだけなら、問題は生じない。凝視し始めると、単純この上ない諸概念が崩壊してゆく。まるで、量子論のそれに似た、ある種の不確定性原理が働いているかのようだ。ある場所でより明確にすればするほど、別の場所ではますます輪郭がぼやけていく。ある穴をふさぐと、別の穴ができる。

これがとりわけ顕著なのは、集合論においてである。選択公理を取り上げてみよう。

非空集合の任意の族
$$\Phi$$
においては、各集合 $X \in \Phi$ から
元を 1 つずつ選ぶことができる。 (4.1)

言い換えると、元 $f(x) \in X$ を各集合 $X \in \Phi$ に対応させる選択関数fが存在するということである。



ツェルメロ、1871~1953

ツェルメロ以前には、(4.1) の主張は自明の事実として数学 の推論において広く用いられていたが、あからさまな形で定式 化されたところ (1904~年)、激しい批判を呼び起こした。その 見返りもあった。例えば、ある集合 X の元を指定する際、困難が生じる可能性がないか、考えてみよう。最初に頭に浮かんで くるのは、そのような困難が存在していない状況である。しかし……集合 I=[0,1] は非可算だが、名前の集合は可算である。 それゆえ、名前付け可能な数の集合は可算である。 では、X の すべての元が原理的に名前を持っていない場合には、

$$X = I \setminus Y$$

に属する元をどうやって指定するのか? もちろん,「名前付け」 というものは、かなりこざかしく、しかも不明確ものだ。しかしそこでは、計算可能性の より基礎的なプラットフォームの上に立つことができる。ではそのとき、Y は計算可能な 数の集合だが、一方、すべての元Xが計算可能でないとしたら、 $X = I \setminus Y$ に属する元をどうやって指定するのか?

最後に示した質問に対する答えが存在しない場合、構成主義者はそれ以上議論することをやめる。そしてこの立場は、それなりに生産的である。この立場は数学の一連の基本法則の理解²⁾、また多数の現代的数学分野(帰納的関数など)の創出をもたらした。これに対立する立場もそれに劣らず生産的である。数学のかなりの部分は非構成主義的な土台の上に立っているが、しかし、それによって大量の有益な結果を生み出している。

そしてそれでもなお、選択公理をめぐる事態はそれほど単純ではない。ここでの標準的な見地はありふれたものだ。すなわち、公準(4.1)は、得るものと失うものとの比較にもとづき、(任意の独立した公理として)採用しても、採用しなくてもいい。(4.1)には、多数の数学的事実が依拠している。例えば:

- 任意のベクトル空間は基底を持っている。
- ・ ルベーグ測度の可算加法性
- ・ ε-δ 論法による連続性の定義と、数列の収束性を通じた連続性の定義との同値性

3. バナッハ-タルスキーのパラドックス

(4.1) なしでやっていける場合でさえ、選択公理はしばしば単純さと見通しの良さという点で利益を与えてくれる。それゆえ、それを放棄することは、まったく好ましくないことのように思われる。

それと同時に、(4.1) は、俗に言う「出来が悪くてお話にならない」帰結をもたらす。 その最も鮮やかな例を挙げてみよう。

球体 B は、有限個の集合



バナッハ, 1892~1945

 $B_1, \dots, B_k \tag{4.2}$

に分割することができる。そのとき、(4.2) より、 B_j を固体のように移動(平行移動プラス回転)させることにより、半径が 2 倍の球体(または半径が 2 分の 1 の球体、もしくは同じ半径の 1 ダースの球体)を作り出すことができる。

これは、バナッハータルスキーの定理から導き出される帰結の一つである。この定理はパラドックスと呼ばれることの方が多い。これは、感情的にはまったく当然のことだ。ここでは合理的な感覚が(4.1)を頑として拒絶し、それを禁止する

²⁾ これはまるで、数学は自らの法則を自分自身では考え出さないかのようだと、皮肉屋は言うかもしれない。

よう要求する。しかし実際には、その不安にはおそらく根拠がない。なにしろ、ここで論じられているのは、普通の幾何学的経験とはいかなる共通性も持っていない分割(4.2)なのだ。例えば、いたるところ微分不可能な関数は、物理学的観点との間におけるそれと同じようなキメラであるが、しかしそこにあるのは、いわばプレイグラウンドの周縁のようなものだけである。ところが、ここで論じられているのは、よく知られている固体の移動である。その結果として激しい反感が生じてくるわけだが、健全な思考にもとづいて判断するなら、そのような感情は物事の本質とはいかなる関係もない。

選択公理の本質をよりよく感じ取るためには、そのいくつかの応用例を考察することが 有益である。

4. 不連続線形関数

一見単純な問題を取り上げよう。

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{4.3}$$

という性質を満たすことができるのは、どのような関数か? (4.3) は線形関数の普通の定義なのだから、この質問は無礼とすら感じられないかもしれない。実は、ここには、「何が何だか分からないへんてこりんなもの」として受けとめられているが、実際には原理的な役割を演じている連続性に関する、但し書きが存在しているのだ。そのような但し書きが存在しない場合には、与えられた質問に対する答えは意外な、しかしそこから得られる帰結という点では生産的なものになる(例えば、ヒルベルトの第3問題の解をもたらす)。

まず最初に、関数方程式(4.3)の解となるものが、普通、線形関数

$$\varphi(x) = kx \tag{4.4}$$

であるのはなぜなのかを考えてみよう。(4.3) より、任意の整数 p について $\varphi(px) = p\varphi(x)$ が容易に導き出される。 z = px の置換によって得られる

$$\varphi\!\!\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{1}{p}\varphi(z)$$

はそれと同値である。それゆえ



タルスキー、1902~1983

$$\varphi\left(\frac{p}{q}z\right) = \frac{p}{q}\varphi(z)$$
 であり、これより $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(1)\frac{p}{q}$

となる (ここで $k = \varphi(1)$)。 すなわち, (4.4) はすべての有理数 x について必ず満たされる。(4.4) の必然性に関する最終結論は, φ の連続性に関する仮定にもとづいて下される (あの但し書き 自体が結論を射止める)。

連続性が存在しない場合、それとは異なる解が存在する可能 性はありそうもないように思える。ところが、選択公理はその ような無数の解を示すことを可能にするのだ。そのような解については、ハメル基底の概 念に依拠して語った方が都合がいい。

そもそも、基底と呼ばれているものは線形独立なベクトルのある総体

$$\{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$$

であって、それを通じて、検討されている空間の任意のベクトル x が一意的に

$$x = \sum_{i} x_i e_i \tag{4.5}$$

と表されることを思い出そう。このとき、 x_i はベクトルxの座標と呼ばれる。

有限次元空間においては、基底の構築手続きはきわめて簡単だ。線形独立なベクトル(それは1個のベクトルであってもよい)の任意の系Bを取り、そこに、Bを通じて線形的に表すことのできない任意のベクトルを付け加える。そのプロセスは何らかの段階で終わる——そうでないとすると、有限次元性との間で矛盾が生じることになる。

選択公理が存在する場合には、そのような手続きは無限次元の場合にも、可算的なバリエーション (4.5) および非可算的なバリエーション (連続的な添え字 i を持っているような場合) において実行することができる。非可算的なバリエーションにおいては必要とされる推論は若干複雑になるが、その本質はほとんど同じままである。このようにして得られる基底はハメル基底と呼ばれる。

$$\lambda_1 3 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0$$

は、 1, がゼロでない有理数のときは成立し得ないからである。

次に関数方程式 (4.3) に戻り、現実の直線上において任意のハメル基底を取り、何らかの基底ベクトル e_λ , 例えば $e_\lambda=\sqrt{5}$, あるいは $e_\lambda=\pi$, あるいは $e_\lambda=1$ さえをも選び、

$$\varphi(x) = kx, \tag{4.6}$$

と置くと、これは(4.3)を満たす関数を与える。

懐疑的な人は、(4.3) のいかなる解も実際には与えられていないのだから、上で述べられていることはすべて詭弁であり、形而上学だと指摘するかもしれない。 $e_{\lambda}=\sqrt{5}$ だとすると、我々は、例えば φ (4) が何に等しいかすら言えなくなる。なぜなら、 x_{λ} は e_{λ} に依存しているだけではなく、我々ではなくて(4.1)が管掌している基底全体 3 にも依存しているからである。では、我々が関数の値を例外的な点においてしか知らないのだとしたら、

 $^{^{3)}}$ 基底に何らかの有理数 e_{β} が含まれていれば、 $\varphi(4)=0$ である。では、含まれていないときは $\varphi(4)=?$

その関数とは、いったい何なのか? ある関数が存在するという事実のみが確定され、その事実そのものは検証の対象にはならないということになってしまう。

そう、そのとおりだ。しかし、このことは建設的な働きをする。

5. ヒルベルトの第3問題の解



ヒルベルト、1862~1943

互いに面積の等しい多角形は分解合同である。すなわち、それらのうち一方の多角形をいくつかのより小さい多角形に切り分け、それらから別の多角形を組み立てることができる。この事実は面積に関する議論を著しく単純化する。ところが R^3 における多面体の体積を決定するときには、複雑な極限移行を用いなければならなくなる。それは必然なのだろうか、それとも互いに体積の等しい多面体もやはり分解合同なのだろうか?既に100年前(1900年)にマックス・ヴィルヘルム・デーンによって否定的に解決されたヒルベルトの第3問題の要点は、まさにこの疑問のうちにある。こうして、 R^2 から R^3 に移行する際、

状況が原理的に変化することが判明した。

デーンの証明はきわめて複雑で錯綜したものだった。しかし他の研究者たちがその単純 化のために多大な努力を払った結果,立方体と正4面体は分解合同ではないことが比較的 はっきり見えるようになった。前節で述べた考え方を用いれば,それはきわめて簡単に説 明することができる。

それを説明するため、多面体 M の擬似重み

$$P(M) = \sum_{i} l_{i} \varphi(\lambda_{i}) \tag{4.7}$$

という概念を導入しよう。ここで,総和計算は長さ l_i のすべての辺について行なわれる。 λ_i はi番目の辺における 2 面角, φ は(4.6)の形の関数である。より正確に言えば,正 4 面体の辺における 2 面角を θ とする。集合 $\{\theta,\pi\}$ をハメル基底まで拡張し(π と θ が非共測であることは容易に確かめられる).

$$\varphi(\lambda) = \lambda_{\theta}$$
,

と置く。すなわち、 $\varphi(\lambda)$ は基底についての展開における θ 番目の座標と等しいと置く。我々は $\varphi(\lambda)$ の値の計算を、有理数 c の場合についての

$$\varphi(c\theta) = c \quad \succeq \quad \varphi(c\pi) = 0$$

の 2 つの状況においてしか行うことができないが 4 , これは我々の目的にとってはちょうど十分である。

$$P(\vec{\Sigma} \, \vec{\mathcal{T}} \, | \mathbf{\Phi}) = \varphi \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{i} l_{i}^{k} = 0 \tag{4.8}$$

$$P(\mathbb{E}4\overline{m}\, | \Phi) = \varphi(\theta) \sum_{i} l_{i}^{T} = \sum_{i} l_{i}^{T} \neq 0$$

$$\tag{4.9}$$

なので,

となる。所要の結果はこの不等式から導き出される。

この話における舞台裏の美学は次の点にある。立方体あるいは正 4 面体をより小さい多面体に切り分け、公式 (4.7) によって計算されたそれらのより小さい多面体の擬似重みを足し合わせると、最初の多面体と同じ擬似重みが得られる。これが生じるのは、すべての新たな辺(切り分けの結果現れた辺)についての総和がゼロを与えるからである。ここで何が問題なのかと言えば、それは、ある l が M の内部に横たわっていて、新たな多面体の1 辺(または1 辺の一部分)となる場合には

$$l\{\varphi(\lambda_1) + \dots + \varphi(\lambda_s)\} = l\varphi(\lambda_1 + \dots + \lambda_s) = l\varphi(2\pi) = 0$$

となり、1がMの面上に横たわっている場合にもやはり

$$l\{\varphi(\lambda_1) + \dots + \varphi(\lambda_s)\} = l\varphi(\lambda_1 + \dots + \lambda_s) = l\varphi(\pi) = 0$$

となり、ゼロが得られるといういうことである。結局、l が最初の多面体の 1 辺と一致していれば、 $\lambda_l+\dots+\lambda_s$ は、立方体の場合は $\pi/2$ となり、正 4 面体の場合は θ となる。このように、擬似重みは切り分け方に依存しておらず、単純に公式(4.8)、(4.9)に従って計算することができる。

 $^{^{4)}}$ 我々が他の角度 λ についての $\varphi(\lambda)$ の値を知ることができないのは、基底の拡張が任意だからである。しかし、それらの値は我々には不要である。

第5章 否定的結果の価値について

Do what you can, with what you have, where you are.

Theodore Roosevelt

否定的な事実は、現実についてのあらゆる角度からの研究へと人を駆り立てる。その結果、ときには目がより広く開かれることもある。

1. ブラウワーの定理



ブラウワー, 1881~1966

球面Sを境界とする可塑性の球体Bを思い浮かべよう。もちろん,BをつぶしてSに沿って平らにし、広げることができる。このことは、球面への球体の連続写像F(x)が存在することを意味している。概して言えば、これは月並みな事実だ。

ただし、そのような変形の際、S の各点は元の場所に留まるという要求を与えよう。言い換えると、境界S を固定し、B の内部を変形しつつ、有限な球面に沿って球体を広げようと試みるわけだ。容易に分かるように、球体を分断せずにそれを行うことは不可能である。

定式化は次の「否定的な」結果を与える。

S のすべての点を元の場所に留まらせる,有限な球面 S への球体 B の連続写像は存在しない。

この主張の否定的な性格は、その価値を減少させない。しかるべき再定式化を行えば肯定的な結果、**ブラウワーの定理**がもたらされるからだ。

球体 B のそれ自身への任意の連続写像 T(x) は不動点,すなわちある $x \in B$ について x = T(x) (5.1)

を持っている。

これは、方程式の可解性を解明するための価値あるツールである。先行する(否定的な)結果からブラウワーの定理までは、文字どおり、たった一歩だ。

それとは逆のこと、つまり任意の $x \in B$ について $x \neq T(x)$ であると仮定した場合に、xとT(x)を線分で結び、その線分を点xを超え、点F(x)で球面Sと交わるまで延長してみよう(図 16 参照)。F(x) はB からSへの連続写像であるが、この写像は球面Sを元の場所に留まらせていることは明らかである。矛盾だ。

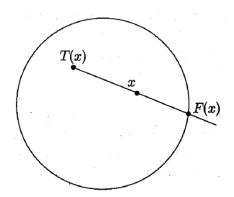


図 16 写像 F(x) は球面 S を元の場所に留まらせている。

2. 否定のエネルギー

別の領域からの一例。もしクラス P とクラス NP (多項式時間的に可解な課題と数え上 げに関する課題¹⁾)との一致の問題が否定的な解P≠NPを持っているとすると、それはあ る意味で悪いことである。なぜなら、大量の課題が効率的な解法アルゴリズムを持たない ままになってしまうからである。しかしそれは、他ならぬP≠NPという予想に基本的に依 拠している暗号法にとっては良いことである。滅相もない、もしP=NPだとしたら機密性 が崩壊してしまう、と思う人がいるかもしれない。大丈夫、崩壊しない。ただ単に、新た な条件の下で発展していくことになるだけだ。しかも、数学者の大群が仕事を失い、もし かしたら、他ならぬ暗号法の領域に方向転換する可能性だってある。

もちろん、「ブランコ運動」は常に生じるとは限らない。感触的に否定的と感じられる結 果が価値を持っていることが判明するのは、競合する領域におけるその結果の利用が何か 具体的に肯定的なものを与えてくれるからではなく,それ自体が価値を持っているからで ある場合の方が多い。

例えば、一般に反例と呼ばれている多数の数学的事実を取り上げてみよう。この用語法 には若干奇妙なところがあることを認める必要がある。反例の部類に含められるのは、通 常、最も典型的な状況である。例えば、ほとんどすべての連続関数は微分不可能であるの に、ワイエルシュトラスのいたるところ微分不可能な関数の例は反例とされている。これ が反例とされているのは、そのようなキメラを想像するのは直観にとって困難だからだ。 そのため、ワイエルシュトラスの離れわざは当時の数学界に強烈な印象を与えた。それ以 外の典型的な事実や対象の発見、例えば $\sqrt{2}$ の非有理性(古代ギリシア人)、超越数(リウ ヴィル), 非可解集合, 証明不可能な言明, 等々も鮮烈な情動を引き起こした。

それらに劣らずスケールの大きな、例えば次のような現象も魅力的だ。

・ 無理数点において連続で、有理数点において不連続な関数(リーマン)

¹⁾ より正確に言えば、NP 完全な課題、すなわち普遍的探索に関する課題。

- ・ 最小周期を持たない²⁾周期関数 $f(x) \neq const$
- 不連続線形関数(第4章参照)

ここでの魅力の源泉はかなり明白である。経験の90%は不成功と敗北から成り立っている。そうでなければならない。——さもなければ、正しき道は基礎も対照物も持たず、空中にぶら下がってしまうことになる。それゆえ、「悪しき」関数、集合、事実には大きな需要がある。それは、例えば探偵と同じだ。両方とも、様々な不快な事象を思い出させ、トーヌスを上昇させる。数学というジャンルの法律によれば、それらの不快事象は真実らしく見え、かつ死活的な重要性を持っていなければならない。しかし我々は、それらを回避するべく、自らを訓練しなければならない……。

3. 実在する不快事象に対する需要

数学における不快事象の実在性は、文学における登場人物の迫真性に似ている。例えば前章では、共通の境界を持つ3つ以上の領域をめぐるアブノーマルな状況が取り上げられた。その事実は無条件に鮮明なものだが、あまりにも作りものめいて見えるかもしれない。そのため、意外性から得られる満足感は、実際にはそんなことには出会わないという確信によって大きく損なわれる。

ところが,実際に出会うことが判明するのだ! ――しかも,最も月並みな状況において。 複素平面における反復プロセス

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} \tag{5.2}$$

は1の立方根を計算している。その立方根は

1,
$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$
, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ (5.3)

の3つが存在し、それに対応して3つの吸引領域A,B,Cが存在する。(5.2)のプロセスは、 z_0 がどの領域に属しているかに応じて、(5.3)の根のうちの1つに収束する。

さて次に、 Γ_A 、 Γ_B 、 Γ_C が吸引領域A,B,Cの境界を表すとする。あり得ないことのように思えるが、

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \Gamma_C$$

であること, すなわち, 3 つの吸引領域が同一の境界を持っていることは事実なのだ³⁾。

 $^{^{2)}}$ この要求を満たす関数としては、例えば、有理数点における f(x)=1、無理数点における f(x)=2 がある。

³⁾ これは、前世紀初頭にガストン・ジュリアが研究したフラクタル発生の最も単純な状況である。

この例は「運河掘削」(第4章)の描像を本質的に補充し、検討されている現象に関する 理解を根本的に変える。共通の境界を持つ3つの領域という状況は、以前はきわめて病的 で非現実的に見えていたとすれば、今や、それはごくありふれた状況のように見える。

でっち上げられた「汚いトリック」(数学のトリックを含む)というものは、通常、人に活力を与えてくれる。あるいは、そういうトリックが最初から活躍していたことが発見されることもある。そして、このプロセスは常に注目の的となる。

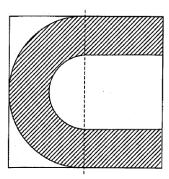


図17 スメールの馬蹄

例えば、いわゆる \mathbf{Z} メールの馬蹄がこんなに有名になったのはなぜだろう? なにしろ、そこにあるのはすべて、本質的にはきわめて単純で月並みでさえあるものばかりなのだ。そこでは、単位正方形のそれ自身への初等変換 f(x) が考察されている。正方形を引き伸ばして高さ1/3の長方形の帯にし、次に図 17 に示すように、その帯を正方形上に馬蹄形に置く。これは写像fに他ならない。スメールは、fを反復すると面白いことが生じることに気づいた。破線で描かれている垂直断面において、線分[0,1] からの写像fを行うと、中央の

3分の1の部分、すなわち $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ が消え失せ、(斜線領域における) 2つの端部、すなわち

$$\left[0,\frac{1}{3}\right] \succeq \left[\frac{2}{3},1\right] \tag{5.4}$$

が残る。

容易に見て取れるように、(5.4) の 2 つの線分からの f を再度反復したとき、それぞれの中央の 3 分の 1 の部分…、等々がまた消え失せる。極限においては何が得られるか?

極限においては有名なカントール集合が得られる。言い換えれば、何も新しいものは得られない。では、スメールの馬蹄はいったい何を与えるのか? きわめて多数のものを与えることが判明する。

それまで、カントール集合の構築は線分から3分の1を、次に残った部分を純粋に思弁の上で取り去るというやり方で行われ、その結果は、とりわけアカデミックな関心しか引かない詭弁のモンスターのように思われていた。ところが今では、「モンスター」は壁の向

こう側に隣り合わせに生きていることが明らかになりつつある。平凡な関数fは、「3分の1の取り去り」プロセスを初歩的な形で行っているのだ。

注記と補足

1. 方程式の可解性に関する一般的イデオロギー(小断片の形でのブラウワーの定理を含む)は、幾何学的に透明な描像に基礎を置いている。

境界 Γ を持つ平面(または空間)の有限領域を Ω とし、連続写像fが Γ を閉表面 $f(\Gamma)$ に移すとする。点O が $f(\Gamma)$ の内部にある場合には、方程式

$$f(x) = 0$$

は Ω 内に解を持つ (なぜなら、像 $f(\Omega)$ は必ず $f(\Gamma)$ の内部を覆っていなければならないのだから)。

点 O が $f(\Gamma)$ の内部にあるかどうかは,例えば, $f(\Gamma)$ を「釘」O から取り外そうと(引き剥がそうと)試みることによって検証することができる(図 18 参照)。言い換えると, $f(\Gamma)$ の表面を変形させながら,しかもその際,ゼロに触れないようにしながら, $f(\Gamma)$ を O からより遠くへ引き離し,次に, $f(\Gamma)$ を例えば何らかの 1 点 $\omega \neq 0$ に圧縮するのである。これは次のように定式化することができる。連続変形(ホモトピー) $h(x,\tau)$ が,任意の $x \in \Gamma$, $\tau \in [0,1]$ のとき,

$$h(x,0) \equiv f(x), \quad h(x,1) \equiv \omega \neq 0, \quad x \in \Gamma$$

かつ

$h(x,\tau) \neq 0$

であるような変形であるならば (これを**変形の非退化性**と呼ぶ), O は $f(\Gamma)$ の内部にはない。

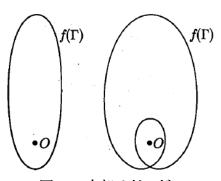


図 18 内部はどこだ?

一般的結果は、今度はこうなる。**方程式(5.1)は、非退化変形が存在しないならば、\Omega** において可解である。

もちろん,ここでの一般性は高い買い物になる。「存在しないこと」も、「無罪であること」 も、それを証明するのは等しく難しいため、「非退化性の推定」は明らかに役に立たない。そ こで実際には、様々な個別的事例が用いられる。ブラウワーの定理はその一つである。別のバ リエーション。もし $O \in \Omega$ であって, $f(\Gamma)$ が Γ においてうまく非退化的に変形されるならば, 万事順調となる(なぜなら, Γ はその後は点 $\omega \neq 0$ に変形されないからである)。変形は,例え ば線形変形

$$h(x,\tau) = (1-\tau)x + \tau f(x)$$

となる。これが非退化であるためには、ベクトルxとf(x)が Γ に対して反対方向を向いていないことが必要十分条件であることは明らかである。

上に書かれている描像の単純さは、ある程度見かけだけのものだ。これはジョルダンの定理 (第4章参照)における状況とほぼ同じである。事態を整理しようとするここでの努力は、我々を一目瞭然性からはるかに遠い所へ連れ去り、トポロジーは「描像の世界」から、そこでは人間が経験も感覚も持つことのできない4、抽象的なニッチに移行してしまう。そのような条件の下では、たとえ厳密でないとしても、透明性を備えたモデルが特に有益となる。

2. 人工的な構築物が自然の構造物に転化する傾向はかなり強く、あらゆるレベルにおいて発現している。

関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (xが無理数のとき) \\ x & (xが有理数のとき) \end{cases}$$

は、最初は人工的なもののように思える。にもかかわらず、

$$k \to \infty$$
のとき、 $f_k(x) \to f(x)$

となる。ここで,

$$f_k(x) \to \lim_{n \to \infty} (\cos k! \, \pi x)^{2n}$$

である。言うまでもなく、同一の関数が得られている。しかし、そこにはあり得る起源が示されており、このことがまったく別のアプローチを特徴づけている。これは医学におけるのと同様だ。病気の結果は病理解剖学者が記録し、病因の解明と治療は治療者が行う。数学においてもそれらと同様な活動分野があり得る。

⁴⁾ 不快感を勘定に入れないとすれば。

第6章 無限大のパラドックス

そしてお前は踏みしだかれた草の上に 恋人とともに腰をおろし 愛と情熱をこめて語ることだろう いつか既に語られた言葉を。 私がお前より前にその言葉を語ったことはないと お前が固く信じるならば お前は考え違いをすることになる。

カイシン・クリエフ [ソ連の詩人]

無限大が、存在しないものが生じる場所として知られているのには、ちゃんとした理由がある。2つの数列

$$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots \tag{6.1}$$

$$1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$$
 (6.2)

のうち、より多くの項を含んでいるのはどちらか? ある面から見ると、平方の集合はきわめてまばらな自然数列である。別の面から見ると、これら2つの数列は

$$n \Leftrightarrow n^2$$

という互いに一意的な対応関係に置くことができる。このことは、集合(6.1)と(6.2)の「同等性」――濃度が同等であるということ――という、感情的にはパラドキシカルに感じられる答えを与える。

もちろん,この例はもうそれだけでたまらない不快感を引き起こした。しかし,この例は矛盾の本質を最も単純な形で暴き出している。検討している対象が有限な場合には,あらゆる誤った推論は遅かれ早かれ壁に突き当たる。ところが推論が無限集合について進められている場合には,意見の不一致はしばしば地平線の彼方に消え去り,対立する意見の衝突は生じない。国家が我々から毎日 10 ドルを徴収し,1 ドルを返還するとしよう。もしこのプロセスが無限だとすると,プロセスが終了したとき,国家にとって嬉しいことに,我々は貸し借りなしということになるはずである。任意のn番目の1 ドルはn回目に我々に返還されたからだ。

ここで生じている矛盾の性格は、無論、より豊かなものであり、そのいくつかは数学の 基礎に対して深刻な影響を及ぼしている。にもかかわらず、「存在しないもの」を禁止する のは誤りなのではなかろうか。無限大はツールとして有効に機能している。

方程式

$$\sqrt{x + \sqrt{x + 2}} = 2\tag{6.3}$$

を解かなければならないとする。根号の中の2を(6.3)の左辺で置き換え、この操作を無限回繰り返してみよう。その結果、(6.3)は無限個の根号を持つ方程式

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \tag{6.4}$$

に移行する(2は「地平線の彼方に」消え去った)。無限大マイナス1は再び無限大なのだから、方程式(6.4)は

$$\sqrt{x+2}=2$$

と同値であり、ここからx=2が得られる。(6.3)の形の最初の方程式が1ダースの根号を含んでいて、根号を順次外していく作業がうんざりするほど退屈な場合にも、これと同じ手品が働いてくれる。

しかしもちろん, 問題は個々の手品にはない。無限大――それは, 抽象的思考の永遠の テーマの一つであり, 最も生産的な観念の一つなのである。

1. ショックにおける直観

長い間、すべての無限大は互いに等しいもののようにみなされていた。この問題の理解における革命をなし遂げたのはゲオルグ・カントールである。彼はまず最初の仕事として、自然数列と同値なのはどのような無限大なのか、また濃度の点で自然数列を上回っているのはどのような無限大なのかを解明するという目標を自らに与えた。有理数は整数より多いという最初の自然な予想は、誤りであることが判明した。両者は同数だったのだ。この事実を確定するため、図 19 に示すように有理数を無限大の正方形の表の形に配置し、それらの有理数に矢印の順番に従って番号を付ける。

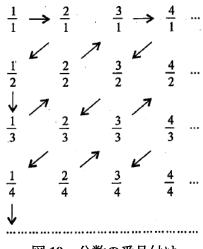


図19 分数の番号付け

その結果, 1/1という数は番号 1, 1/2 は番号 2, 2/1 は番号 3, …等々を得る。既に出会った数はパスする。容易に見て取れるように, このような方法は, 有理数の集合と自然数列の間における互いに一意的な対応関係を確定する。自然数列とこの意味で同値な任意の集合は**可算集合**と呼ばれる。

さらにカントールは、よく知られているように、線分[0,1]の実数の集合はもはや可算ではないことを示した。その逆を仮定した場合には、それらの実数に対して

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$
 (6.5)

と番号を付けることが可能であるが、そうすると、その小数点第 1 位が a_1 と異なり、小数点第 2 位が a_2 と異なり、…等々である任意の数

$$b = 0, \beta_1 \beta_2, \cdots$$

は (6.5) のリストには含まれないことになり、矛盾が生じる 1 。こうして、無限大[0,1]はより濃度が高いこと(**連続的無限大**と言う)が判明する。

正方形上の点は線分上の点よりも多いことを証明しようとカントールが試みたとき、ドラマチックな瞬間が訪れた。3年間の苦悩ののち、問題は否定的に解決された。カントールはデデキントに、「私にはそれが見えている、しかし信じられないのだ」と書き送った。そのために3年の歳月が流れ去った証明とは、次の証明だ。単位正方形上の各点は2つの座標

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots, y = 0, \beta_1 \beta_2 \cdots$$

によって与えられる。各点に対しては、線分上の点

$$z = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \cdots$$

を対応させることができる。細部についての初歩的な確認作業は、互いに一意的な対応関係

$$z \Leftrightarrow (x, y)$$

を示す。もちろん、これはショックだった。

2. 斉次性の幻惑

正方形をめぐる歴史は100万遍も繰り返し語られてきたので、論理的な破局の感覚はとっくの昔に鈍化している。カントールが味わった苦難は、今では若干上から見下すような態度で論じられている。これに対し、バナッハータルスキーの斉次性のパラドックス(第4章参照)は、今もなお先鋭さを保っている――いずれの場合にも、そこで論じられているのは互いにきわめて近い現象であるにもかかわらず。

¹⁾ 数 b のこのような構築方法は対角線法と呼ばれている。

線分と正方形ではなく、相異なる長さの 2 つの線分の互いに一意的な対応関係についてさえ語ることができる。それらの対応関係は、図 20 に示すように、ある滑らかな関数 f(x) によって確かめられる。

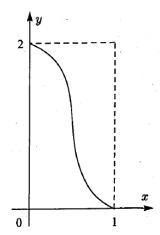


図 20 [0,1] と [0,2] の互いに一意的な対応関係

これも驚くべきことだ。線分[0,1]と線分[0,2]は同じ数の点からなっている。しかも, (6.1)と(6.2)の斉次性が、項を数える際における[2 つの式の各項の値の間における]差を, 無限大に持って行くことによって解消する方法で得られているのに対し、この場合には全体が有限な視界の中にあり、しかしそれでもやはり「1=2」が得られているのだ。もちろん、ここでの無限大は内側からこっそり忍び寄っており、線分は、無限大を有限な容積の中に詰め込むことを可能とする、あの論理的な発明物となっている。

図 20 に話を戻すと、次のように言うことができる。関数fは、結果として線分[0,1]から線分[0,2]を得るようにするためには、x を y = f(x) のいかなる点に移動させる必要があるかを示している。バナッハータルスキーの定理が追加的に与えるものはそれほど多くはない。点をそれぞれ個別に移動させることはできない。点は集団としてでなければ移動させることができない。その際、それらの集団(集合)は固体のように移動させることができる。結果は無条件に美しい。証明が難しいため、その結果は神秘的な後光を持ち続ける。そこでは何が問題なのかを知っている者は少ないからである。

なにしろ、睡眠その他の有益な事柄のために使える時間を、バナッハやタルスキーのために費やしたいなどとは誰も思わない。だから、そのために再度印刷インクを使う価値はおそらくないだろう。ただし、それに近い結果を手短に説明することは可能だ。

波括弧は数の小数部分を表すものとする。正または負のある整数 k について $\{x-y\}=\{k\pi\}$

であるとき、点 $x, y \in [0,1]$ を π -共測な [π -commensurable] 点と呼ぶことにしよう。

線分[0,1] を π -共測な数の非交叉集合 Z_{α} に分割し、各 Z_{α} において元 Z_{α} を 1 つずつ固定し(選択公理)、それらの元から集合 Z を形成して、集合 2

$$Z^k = \{Z + k\pi\}$$

について考察しよう。容易に見て取れるように,集合 Z^k の元の一部分を距離 $(p-k)\pi$ だけ右側に変位させ,別の一部分を距離 $1-(p-k)\pi$ だけ左側に変位させると, Z^k は Z^p (p>k)に移動する。言い換えると, Z^k は 2 つの部分に分断することが可能であり,その 2 つの部分を固体のように移動させることによって Z^p を形成することができる (p<k の場合は同様にして考察される) 3 。最後に, Z^k はその総和において線分[0,1] の全体を与えることは明らかである。

しかし、集合 Z^{rk} を固体として事前に手術 [surgery] した後は、任意の部分列 Z^{rk} もやはりその総和において線分 [0,1] の全体を与える 4)。それゆえ、集合族 $\{Z^k\}$ を最初から 100 万個の無限大の総体 $\{Z^{rk}\}$ に分割しておけば、そのようなそれぞれの総体から線分 [0,1] を作り出し、次に 100 万個の線分を並べて置き、それらの線分 [0,1] から $[0,10^6]$ を形成することができる。

自明のことだが、これは今のところ(大きさの相異なる立方体の)**可算斉次性**にすぎない。 それは、前世紀初頭にハウスドルフによって踏み出されたバナッハータルスキーの結果の方向 へ向けた第一歩であった。さらに、 R^3 においては「塊」の個数は有限にすることが可能だが、 それをやるためにはもうちょっと大きな忍耐が求められる。

²⁾ あらゆる要素 $\{z+k\pi\}$, $z\in \mathbb{Z}$ からなる集合。

 $^{^{3)}}$ 線分[0,1] の両端を結合して円を形成した場合には, \mathbf{Z}^p は \mathbf{Z}^k から剛体の回転として得られる。

 $^{^{4)}}$ 諸部分への分割とそれらの移動は $\mathbf{Z}^{\gamma k}$ を \mathbf{Z}^{k} に移動させる。その結果,集合体の総体 $\{\mathbf{Z}^{\gamma k}\}$ は 完全な総体 $\{\mathbf{Z}^{k}\}$ に移行する。

第7章 確率論の謎

偶然性にはその原因がある。

ペトロニウス

数学の他の諸領域を背景として見たとき、確率論は直観的には予想され得ない多数の結論や解という点で際立っている。その原因はどこにあるのか? 本章の話はまさにその謎について進められる。

1. 予想に反して



ラプラス, 1749~1827

確率論における意外性は既に最初の数歩のうちから生じ始める。クラスには25人の生徒がいる。誕生日が同じ生徒が少なくとも2人いる確率はどれだけか?実は、半分以上だ。これは明らかに予想に反している。しかも、そんな課題がいっぱいあるのだ。

どうしたわけか、確率に関する直観は常に何らかの意見を伴っており、しかも多くの場合、その意見は間違っているという 結果になっている。他の問題に対しては反応すらしないのに、 確率の話が始まるや否や、待ってましたとばかりに議論が始ま る。

3 枚の同様のカードを取る。1 枚目のカードには両側に文字 A を,2 枚目のカードには両側に B を書く。3 枚目のカードには片側に A ,その裏側に B を書く。3 枚のカードを袋に入れ,当てずっぽうに 1 枚を取り出し,テーブルの上に置く。そのカードの見える方の側には文字 A が書かれているとする。その反対側にも A が書かれている確率はどれだけか?

直観は「2分の1」と答えるが、それは誤りだ。その論理は単純だ。表側にAが書かれているということは、すなわち、2枚のカード、AAまたはABのうちの1枚が取り出されたということだ。そのいずれかを取り出す確率は等しい。

錯誤の原因は明白というにはほど遠い。その1枚のカードはランダムに取り出されるだけでなく、次に、両側のうち一方を下にしてランダムに置かれることを忘れてはならない。こう推論しよう。袋の中に、書かれた文字 A はいくつ入っているか? 3 つだ。そのとき、そのうちの2 つはカード AA に、1 つはカード AB に書かれている

我々がテーブルの上に見ているものがカードの片側であるからには、我々が袋から取り出すものはカードの半分、つまり1つの文字ということになる。文字AをAAから取り出



ポアソン, 1781~1840

す確率は、*AB* から取り出す確率の 2 倍だ。我々の前のテーブルにカード*AA* が置かれている確率は 2/3 という結果が得られる。

一見したところ単純な課題をもう 1 つ。 2 つのサイコロ A と B がある。 A の面には 2 つの 6 の目と 4 つの 2 の目, B の面には 3 つの 1 の目と 3 つの 5 の目が描かれている。 2 つのサイコロを投げるとき,出た面の目の数が大きい方が勝ちになる。 サイコロ A が勝つ確率はどれだけか?

一目で分かるようにするため、次のように書く。

A に 6 が出る確率は 1/3=2/6 である。この場合には、自動的に A の勝ちとなる。A に 2 が出る確率は 2/3=4/6 である。この場合には、B に 1 が出れば A の勝ちとなるが、B に 1 が出る確率は 1/2=3/6 である。それゆえ、A が B に勝つ確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

となる。

今度はさらに次の2つのサイコロを加えてみよう。

$$C - 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 0 \ 0$$
 $D - 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3$

前回と同じやり方で計算すれば、A が B に、B が C に、C が D に、すべて同じ確率 2/3 で勝つことが容易に確かめられる。これは、

$$A > B$$
, $B > C$, $C > D$

という結果が得られたようなものだ。だから、

$$A > D$$
 か, それとも $D > A$ か?

という質問は、馬鹿げた質問のようにさえ思われる。にもかかわらず、D が A に(A が D にではなく)、確率2/3 で勝つのだ。俗に言う、「とんでもないことになっちまった」というやつだ。

2. 錯誤の源

直観の誤謬には沢山の源がある。前節の最後の例の場合、その誤謬の表面には、慣れ親 しんでいる推移性の諸性質を、異なる本性を持っている対象に持ち込むという思考の慣性 がある。しかし、共通の原因もある。確率に関する最も単純な課題においてさえ、いくつ かの要因が相互作用している。思考というものは、原因と結果の線形的連鎖の分析のため



マルコフ, 1856~1922

により大きく適応している。外交的手腕を身につけていないと、 相互作用するわずか2つの要因ですら理性を袋小路に追い込む。

きわめて単純な状況を挙げてみる。南半球と北半球のいずれにおいても、男性に占める赤毛の人の割合は、女性に占める赤毛の人の割合よりも大きいと仮定しよう。この根拠にもとづいて、全体的に女性より男性の方が赤毛の割合が大きいと推論することは可能だろうか?

この推論にはいかなる前提条件も与えられていないにもかか わらず,99%の人間はイエスと答えるだろうという側に,賭け

ることができる。さて、例えば、南半球には女性が10人いて、そのうち赤毛は1人、男性は90人いて、そのうち赤毛は10人としよう。北半球では状況はがらりと変わり、女性は90人、そのうち赤毛は89人、男性は10人で全員が赤毛とする。

$$\frac{10}{90} > \frac{1}{10}$$
, $\frac{10}{10} > \frac{89}{90}$

なので、確かに、各半球においては男性の方が赤毛の割合がより大きい。地球全体においては逆の結果が出る。すなわち、赤毛の割合は男性のうち 20%、女性のうち 90% となる。 経済学や医学ではこの種の「統計的」結論が下されることが稀ではない。

ここまでで検討した、「それがそうであるところのもの」と「それがそう見えるところのもの」との間の不一致の例において責めを負うべきは、直観である。直観の性急さ、無批判さ……。ところが、そこではむしろ理論の方が責めを負うべきかもしれないような矛盾の領域が存在するのだ。

既に約300年前に生まれ、数多くの傑出した学者たちが取り組んできた「サンクトペテルブルクのパラドックス」を取り上げよう。

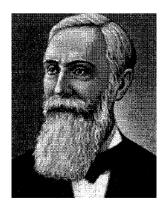
コインを投げる。投げ始めてからn回目に初めて表が出たら、ゲームの参加者に 2^n フランが支払われる。

賞金の数学的期待値は

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + 1 \dots$$

となり、無限大である。それゆえ、ゲームの参加費を払うときには金を惜しんではならないと、理論は勧告する。しかし、常識ある人間なら誰一人、数百フランも賭けないはずだ……。そしてそれが正しいはずだ。

ここでの潜在的に無限大であるコイン投げの回数は、思考を誤った道筋に向かわせる。 それゆえ、それと同じ真相が隠されている別のゲームについて検討することにしよう。コインは $1-2^{-100}$ の確率で平らな面を下にして落ち、その場



チェビシェフ, 1821~1894

合は1ドルが支払われる。コインは 2^{-100} の確率で縁の上に立ち、その場合の支払額は 2^{200} ドルである。賞金の数学的期待値は 2^{100} ドルということになる。それでもやはり、ゲームの参加費として1ドル以上払うのは馬鹿げていることは明らかである。なぜなら、 2^{-100} の確率を持つ事象は「けっして」起きないのであって、それと引き換えにどれだけの額が約束されていたとしても、何の違いもないからである。

ここでの教訓は,数学的期待値といったタイプの「高度に科学的な」概念が持つ,催眠術的な影響に屈してはならないとい

うことだ。その概念は賭け金の合理性の判断基準にはなり得るかもしれないが、いかなる ゲームにも役立たない。背後に隠れて何が起きているかを、易々と見て取れるようになら なければならない。

あり得る意見の不一致のもう一つの原理的な源である,**独立性**の概念について。実は, この概念こそが,一般的な測度論から確率論を区別しているものなのである。

事象AとBは、

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{7.1}$$

ならば、すなわち、「AもBも」生じる確率がAとBの確率の積に等しいとき、互いに独立な事象と呼ばれる。ちなみに、これは、直観が独立性という言葉で言おうとしていることではまったくなく、またもしかしたら、確率論に対して望まれているはずのものではまったくないかもしれない。

例を挙げて説明しよう。2つのコインを投げる。1枚目のコインが表になることを事象A, 2 枚目のコインが表になることを事象 B と表すとする。 さらに事象 C 「1 枚のコインだけが表になる」を検討しよう。

対称的なコインの場合,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$
 (7.2)
 $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$

であるから、3つの事象すべては1対ずつ互いに独立である。直観は $A \ge B \ge 0$ 独立性には同意するが、 $A \ge C \ge 0$ (あるいは $B \ge C \ge 0$)独立性には同意しない。そして直観には根拠がある。(7.2)の独立性はいわば「算術的」なものであり、数値的な一致の結果である。コインの対称性が崩れている場合には、諸事象の相互関係の定性的な差異が発現する。非対称なコイン(表が出る確率 $\ne 1/2$)の場合、 $A \ge B \ge 0$ (7.1)の形の独立性は保たれるものの、等式

$$P(AC) = P(A)P(C)$$
, $P(BC) = P(B)P(C)$

は成り立たなくなる。

ここは、一般的な性格を持ったコメントをするのにうってつけの場所だ。任意の実在系の数学的記述は、パラメーターの決定時における不可避的な誤謬、あるいはあまり重要でない要因の無視、等々の結果として、常に不正確である。その際、モデルが我々の実践的関心を引くのは、当然のことながら、実在系の小さな変化や擾乱に対する明確な非感受性が存在する場合のみに限られる。そうでない場合には、得られる結論が実在する研究対象の挙動や性質に対応したものになるという保証はまったくない。

あれこれの理論が「小さな原因―大きな結果」という形のアノマリーに突き当たるときには、上に述べた事情が毎回明るみに出てくる。確率論はそんな「些細なこと」には目もくれないことが時折ある。

3. 呪いなのか、贈り物なのか?



ヤコブ・ベルヌーイ, 1654~1705

高次元の課題を解くことの難しさは、往々にして「課題における変数が1つなら、それは課題ではない。変数が2つ以上なら、それは解けない」といったタイプのアフォリズムを生み出す。では、変数の数が数十、数百、数千単位で数えられるときには、「次元の呪い」[the curse of dimensionality(リチャード・ベルマンが使った言葉)]をどうやって克服するのか? 奇妙な話だが、高次元は呪いではなく、集合体としての記述の仕方に移行することで解法を急激に簡単化することを可能にする、贈り物であることが稀ではない。問題は、適当なツールが存在するか否かだけにかかっている。

「複雑さの蒸発」の古典的な見本を与えているのは統計物理学である。しかし、この例の催眠術的な役割はあまりにも大きく、その結果、熱力学の固有の領域の外においては、集合体化[系を集合体として取り扱うこと]が持つ可能性の解明はあまり進んでいない。もう一つの標準的な例は大数の法則である。そこでは線形関数

$$L_n(x) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

の安定化が論じられている。

長い間, 非線形関数の安定化は, 対称性が持つ諸性質によって確保されていると考えられていた。実際には, それはそうではない。安定化(漸近的不変性)という言葉でばらつき (平均二乗偏差)がゼロに向かって行くことを表すとするならば, 最悪の安定化の例を与えているのは, 他ならぬ対称関数なのだ。

安定化の真の原因は、関数 $f_n(x)$ の増加速度に対する制限、すなわち関数の勾配に対する n に関して一様な制限

$$|\nabla f_n(x)| \le \gamma \tag{7.3}$$

のうちにある。

例えば、 x_i の値が[0,1]上に一様に分布していて、条件(7.3)が満たされている場合には、 $n\to\infty$ のとき、関数 $f_n(x)$ は漸近的に不変である。

今述べたことを宣伝文句風に言うと次のようになる。

変数の大数の関数は、増加が制限されていれば、ぜーんぶ定数なんです!

n 個の数の算術平均が与えられているとき、その幾何平均を計算する必要が生じたとする。n が十分大きければ、等式

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \gamma \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)$$

(ここで y は定数) は、好きなだけの精度で満たされることが分かる。

このように、n が大きい場合には、労力がかかる掛け合わせをし、次にn 乗根を求める計算を行う必要はない。集合体 $X=(x_1+\dots+x_n)/n$ の計算をして、上に挙げた公式を利用するだけでいいのだ。既に数十程度のn のとき、高い精度が確保される。

第8章 最適化の暗礁

我々は、我々の役に立つかもしれない物事ではなく、 それなしには我々がやっていけなくなるような物事に ついてのみ考えなければならない。

ジェローム・K・ジェローム

最適化という虫は心理の奥深くに住み着いている。人間は自らを最適化するだけでなく、自然の中にも最適化があることに気づき、それを探し出そうとする。満足感を与えてくれるのは「光は最短経路に沿って伝播する」なのであって、「入射角と反射角は等しい」といったようなことではない。数学において極致問題が大きな人気を博しているのは、明らかにこの理由による。

1. 単純な罠

ある種の2変数関数 $z=\varphi(x,y)$ がある。そのグラフをゼロ点を通る垂直平面で切断する。 断面には曲線が現われる。そのような任意の断面において、ゼロ点に最小値を持つ曲線が 得られるとする。その場合、関数 $\varphi(x,y)$ も必ずゼロ点に最小値を持たなければならない か?

単純な例を栄養分として育てられた直観は、イエスと答える。正しい答えはノーだ。

$$z = 2x^4 - 3x^2y + y^2 (8.1)$$

という単純な状況を取り上げてみよう。任意の直線 y=ax上において、関数

$$z = 2x^4 - 3ax^3 + a^2x^2$$

はゼロにおいて局所最小値を取る。なぜなら、関数の挙動は最高次の項によって決定されるからである。ここでは、それは a^2x^2 である。a=0のときは $z=2x^4$ を得るが、これも最小値である。

断面x=0においては放物線が得られ、その $z=y^2$ がまたも最小値となる。

しかし、条件 $y=cx^2$ (ここで1< c< 2) を満たすゼロでない x,y の場合には、関数 (8.1) は負である。それゆえ、この関数はゼロにおいて最小値を持つことができない。その理由 は容易に理解することができる。z を

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

の形に書くと、ここから、斜線領域(図 21 参照)においてはz<0であることは明らかである。

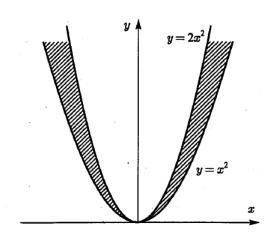


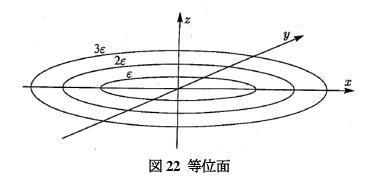
図21 被乗数のグラフ

2. 視覚化の手法

1 変数の連続関数において、単一の局所最小値が存在し、局所最大値が存在しない場合には、その局所最小値は自動的に大域最小値となる。

2変数の連続関数についても同じことが言えるだろうか?

ここでは,等位線という用語を使って考えると都合がいい。例えば, $\varphi(x,y)$ はゼロにおいて最小値,例えばゼロ値を取るとする。 $z=\varphi(x,y)$ のグラフを,z軸と点 ε , 2ε , 3ε ,等々において交わる垂直平面で切り始めよう。断面においては一定な等位線が得られる。それらの等位線を平面(x,y)上に投影すると,図 22 のような描像が得られる。



今度は別のバリエーション (図 23 参照) を考えよう。ここでは関数は単一の局所最小値を持っているが、それは大域最小値ではない。この場合、その関数には、それ以外の極値点は極小値点も、最大値点も、鞍点も存在しない。

この関数のグラフを思考上でイメージするためには、物理モデルを検討するのが有益だ。 2本の無限長のひもを取り、それらを等位線1に沿って伸ばす。2本のひもを固定し、上方 からフレキシブルな薄膜を引っ掛け、2本のひもに接着し、押してへこませてみよう……。 まあ大体、図に描かれているような状態が得られるようにイメージしてみよう。

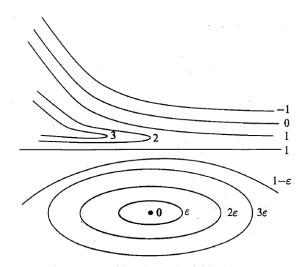


図23 単一の局所最小値は大域最小値ではない。

ちなみにこれは、幾何学的思考の便利なツールなのだ。だから、もしうまくイメージが得られなかったのなら、もう一度試してみるだけの価値はある。それは課題を解くためではない。ツールを手に入れるためだ。

数学の問題を解決するために視覚的なモデルが考え出されたことは、これまで稀ではない。生産的な関連性を探り当てた者、あるいは向こう岸へ渡るための橋を見出した者は、 魔法の杖の持ち主になった。これは、それだけで独立した話の大きなテーマになる。

もう一つの例。山の表面は 2 変数関数 $z = \varphi(x,y)$ のグラフとみなすことができる。2 つの頂 (2 つの局所最大値) がある場合には、普通、それらの間には峠 (鞍部) がある。図 24 には、鞍点に関する一定な等位線が描かれている。

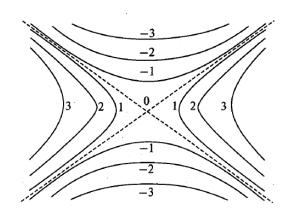


図 24 鞍部の一定な等位線

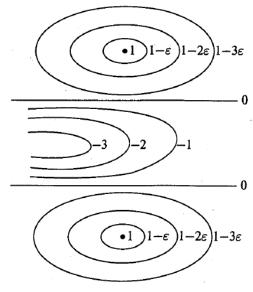


図 25 峠のない 2 つの頂

直観は、頂が2つあれば、必ず峠が存在するという考え方へ我々を押しやる。奇妙な話だが、ここでの正答はイエスでもあり、ノーでもある。これがその例だ(図 25 参照)。2本の平行なひもに薄膜を接着する。中央の帯状部では薄膜を斜め方向に押してへこませ、両端部では2つの頂を膨れ上がらせてみよう。

峠はもうない。それは無限大へ連れ去られてしまったのだ。球体(地球)の表面においては、状況はそれとは異なる。鞍部をしまうところはどこにもない。鞍部を2つの頂から遠ざけることは可能だが、取り去ることはできない。

3. 創造主の自家製品

「この世界においては、何らかの最大または最小の意味をそこに見て取ることのできないような物事は生じない」。オイラーは自らの着想の深遠さを神のものとみなし、こう語った。別の言い方もできたかもしれない。「ひっくり返して最適化の形で陳列することのできないような物事は、この世界には存在しない」と。いずれにせよ、物理学のほぼ全体は既に変分原理の上に立脚しており、このことが独自の成果を生んでいる。

最初のうち、ドリフト、例えば力学から変分的なモチーフへのドリフトは、同値変換の 道に沿って進んでいるように見えた。ニュートンの諸法則は一歩一歩、より便利な形式に 転換されていった。ラグランジュ方程式に、次にハミルトン方程式に……。その次に若干 の論理的飛躍がなされ、最初の運動方程式がその解となるような変分問題が考え出された。 その結果、思考の新たなカテゴリーが生まれ、それが力学をより高い段階に引き上げた。 最適化の着想が引き起こす覚醒は、既に最も初歩的なレベルにおいて豊かな実りをもたらす。その着想はその同じ力学においても、既に静力学において有効に働く。例えば、図26に示されているばねの張力はいくらか? 最も簡単なのは、ポテンシャルエネルギー

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - 2mgx + \text{const}$$

の最小化に頼ることだ。U'(x)=0よりkx=2mgがただちに得られる。

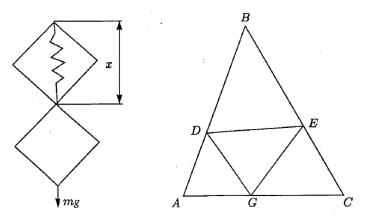


図 26 ばねの張力は いくらか?

図 27 周長が最小な 3 角形に関 するシュワルツの問題

エネルギーの概念は、純粋に数学上の課題を解くときにも役に立ってくれることがある。 鋭角3角形の内部に、各頂点が鋭角3角形の各辺上にあり、周長が最小な3角形を内接させなければならない(シュワルツの問題)。 $\triangle ABC$ の針金模型(図27参照)を作ってみよう。AB,BC,AC に自由に滑るリングD,E,G をはめ、それらのリングをゴムひもでつなぐ。ゴムひもの張力をfとし、fはゴムひもの伸縮の大きさに依存しないものとする。このとき、ポテンシャルエネルギーは

$$U = f(DE + EG + GD) \tag{8.2}$$

となる。この模型そのものが課題を自動的に解く。平衡状態において,(8.2) の最小値,すなわち $\triangle DEG$ の周長の最小値が達成される。そしてその平衡条件から明らかなように,D, E, G の各点における伸縮力の合力は, $\triangle ABC$ の当該の辺に対して垂直でなければならない。これはもう別の課題だが,その解は既に知られている。すなわち,3 角形 $\triangle DEG$ は, $\triangle ABC$ の 3 つの高さの垂線の足を結ぶことによって得られる。

次はもっと複雑な課題。点Oを通り、3面角から体積が最小のピラミッドを切り取るような平面を定めよ(図28参照)。

ここでも再び、物理的なモデル化とポテンシャルエネルギーの最小化が簡単な解法を与えてくれる。点 *O* において平面 *ABC* を自在継手で固定し、ガスを充填した気密容器に模型全体を収める。*SABC* 内は真空である。平衡状態において、ガスの体積は最大であり、

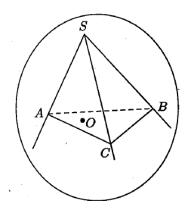


図 28 体積が最小のピラミッドをどうやって切り取るか?

SABC は最小である。別の面から見ると、平衡状態において、ガスの圧力の中心は点Oと 一致していなければならず、それゆえ、点Oは $\triangle ABC$ の3つの中線の交点でなければなら ない。

これと同趣旨の動力学的課題を記述するためにはもっと多くの紙幅が必要とされるが、 しかしそこでの結果はさらに説得力がある。

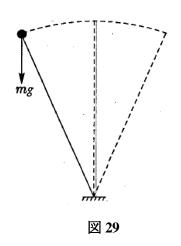
人間が神の真似をして自分で考え出した最適化問題が沢山ある。通常、それらはある種 の人為性やわざとらしさにもとづいて容易に見分けることができる。問題なのは、最適化 に対する明白な欲求は、必ずしも常に明白ではないということだ。その欲求は、選択問題 (ルートの選択、スケジュールの選択、軌道の選択、等々)を何とかして理にかなったや り方で解決しなければならないという必要性から生じている場合がかなりしばしばある。 研究者は判定基準を設定する際、自分自身の企図の罠にかかることが稀ではない。出発点 をなす課題は、常にあれこれの程度まで不正確で近似的なものだ。そのような条件の下で 硬い目的関数を与えることは、控えめに言っても非論理的である。判定基準は目的の明確 性を与えるが、しかし通常、現実的課題とはいかなる関係もない、様々なちっぽけな事柄 を考慮に入れることを要求する。また逆に、モデルの記述に反映されそこなった本質的要 因は、そもそも最適化の枠外に取り残される。

その結果、「最適なダイエット方法としてのバケツ2杯分の酢」といったタイプの解が得 られる。幸いなことに酢の解の不条理さは一見して明らかだが、「最適発展」のための経済 計画のそれは、それほど明白ではない。

第9章 分岐とカタストロフ

10の原因は1つの原因よりも説得力がない。

XYZ



支点の振動数を増加させていくと、振り子は「突然、発狂する」。下側平衡位置を投げ捨て、上側平衡位置の周りで振動し始める。これは**分岐**[bifurcation]、すなわちパラメーターの擾乱に伴う系の挙動の定性的変化の一例である。通常、「小さな擾乱」が語られるが、それは、定性的跳躍という話のテーマが臨界値の近傍で展開されるからである。ほんのちょっと左側へ――すると、安定系がてんでばらばらになる(図 29 参照)。

1. メタモルフォーゼの原因

静力学が動力学の手品を決定づけることがしばしばある。例えば、系が微分方程式(ベクトル方程式を含む)

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon) \tag{9.1}$$

によって記述されている場合、その動力学は、パラメーター ε が変化したとき、平衡状態、 すなわち方程式 $F(x,\varepsilon)=0$ の解に何が生じるかに依存する。

 $F(x,\varepsilon)$ がある関数 φ の勾配であるというポピュラーな状況においては、そこにおいて勾配 $\nabla F(x,\varepsilon)$ がゼロになる φ のポテンシャルの臨界点が、平衡状態の役目を果たす。

関数 $\varphi(x)=x^3$ の擾乱 εx が小さいとき,すなわち $x^3+\varepsilon x$ に移行するとき, $\varepsilon>0$ の場合には臨界点 x=0 (変曲点)がそっくり消失するのに対し, ε が負の場合には x=0 の近傍に 2 つの新たな臨界点が出現する。それと同様に, x^4 は, $\varepsilon<0$ の絶対値が好きなだけ小さいとき,擾乱 $x^4+\varepsilon x^2$ の結果,x=0 の近傍において 1 つではなく 2 つの最小値と 1 つの最大値を与える。これは否定的な例である。

関数 $\varphi(x) = x^2$ は、構造的に安定した臨界点という別の種類の例を与える。 x^2 の小さな擾乱は、臨界点をごくわずかだけ移動させることしかできない。ただし、その臨界点は1つだけのままで、そのタイプ(最小値)を維持する。

パラメーターの数がそれより大きい場合には、新たなタイプの状況が生まれる。その状況に取り組んでいるのはカタストロフィー理論だ。例えば、関数

$$\varphi_{\lambda}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \tag{9.2}$$



ポアンカレ, 1854~1912

のxに関する最小値は、条件

$$\frac{d\varphi_{\lambda}}{dx} = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0$$

によって決定される。

これは、いわゆる**カスプのカタストロフ**の方程式である。パラメーター λ , λ が相異なるとき、この 3 次方程式は 1 つまたは 3 つの実根を持つことになる。図 30 に描かれている表面が得られる。この表面を、何らかの多価関数 $x(\lambda_1,\lambda_2)$ のグラフとみなすことは可能か? 一般的に言えば可能だ。しかし実は、ここではある、もっと大きなものが含意されている。例えば、系が最初の時点で点

Aにあり、パラメーター λ が滑らかに増加していく場合には、系の状態はACBに沿って変化していき、そのとき、点Cで跳躍が生じる。 λ が最初の位置に戻るときには、系の状態はそれとは別の経路BEFに沿って変化する(何かヒステリシス・ループのようなもの)。それと同時に、パラメーター λ 、 λ が特殊なやり方で調整されている場合には、ADBの経路に沿ってAからBへ移行することが可能である。結局、表面の斜線部分は、系の実現不可能な状態(不安定状態、準安定状態)に対応している。

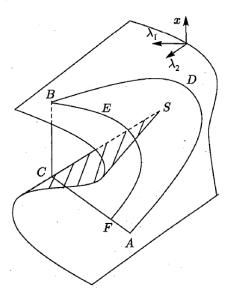


図30 カスプのカタストロフ

この3次方程式は、点Sにおいて特徴的な特異点を持つカスプのカタストロフの標準形を与える。非線形座標変換を用いると、それ以外の様々な方程式がこのような形に帰着する。第一印象では、相異なるタイプの特異点がかなり多数存在し得るのではないかという感じがする。ところが、パラメーターが2つの場合、構造的安定性を持った典型的な事例においては、カスプのカタストロフと折り目のカタストロフの2つのタイプしか見られないことが判明する。パラメーターが3つ以上の場合には、相異なるタイプの特異点はそれ

より若干多くなるが、もうそれだけで特異点の完全な分類表が与えられてしまう。これが 分かったのは、かなりの程度までアーノルド^[款注]のおかげだ。

注記 次の点に留意しよう。 x^4 の関数の最小値は、 εx^2 の擾乱に起因する構造的に不安定 な特異点の例として挙げたものである。(9.2) において、2 次項(および線形項) は「合法化 [legalization]」されており、それゆえ εx^2 の擾乱は、(「孤立している」 x^4 の項とは異なり) 構 造的に安定している関数(9.2)のパラメーターしか変化させない。しかしこれは、もはや単純 な定理ではない。

2. 構造安定性

カタストロフィー理論の創始者とみなされているルネ・トムは、理論の名前として SOS 信号レベルのエモーショナルな呼び名を考え出した。しかし、俗に言うように、物事は付 けられた呼び名のとおりに進んでゆくものだ。この場合もそういう結果になった。この「刺 激的」な名前は,ある段階ではこの理論の異常なほどの人気をもたらした。これは,ある 面から見ると結構なことだった。別の面から見ると、どこが数学でどこがピーアールなの か見分けのつかない、ごった煮が出来上がった。

カタストロフィー理論で特に重要な役割を演じているのは、構造安定性である。問題な のは、相異なる種類の**特異点**が原理的にいくらでも好きなだけ存在することが可能であり、 そのため、研究対象が四方八方に分散してしまうことだ。それと同時に、系にごくわずか でも擾乱が生じると消滅するようなカタストロフを研究することに意味はないのは、明ら かである。まさにこのことが、大雑把な(構造的に安定した)状況に注意を局所化する上 での合理的な根拠となった。

カタストロフィー理論が出現するのはあまりにも遅すぎたと言われている。この理論は, 「それよりずっと前なら」自然な形で与えられていたはずの問題と取り組んでいる。 例えば……。

スカラー変数 x の関数 f(x) の挙動は、そのテイラー級数

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$$
, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

を吟味することによって解明することができる。

普通, その吟味は, その級数のうち f(x) の十分良い近似を与えるある区間の範囲内に留 められる。例えば、f'(0)=0なら、臨界点x=0の性格は、テイラー級数の最初の非ゼロ項 にもとづいて判定することができる (a, > 0 のときは最小値, a, < 0 のときは最大値, 等々)。

Vladimir Igorevich Arnold (ロシア語読みではアルノーリト) (1937-2010) はソ連・ロシアの数学者。特 異点理論に関する貢献によりルネ・トムのカタストロフィー理論を一変させた。その著作のうち数点が邦訳さ れ, 出版されている。

多変数関数の場合も事態はそれと同じような状況にあるという神話が広く流布している。 実際には、それはそうではない。そして、その状況を説明することがカタストロフィー理 論の課題の一つとなっている。

 $\varphi(x,y)$ のテイラー級数展開が 102 次以上から始まる関数 $^{1)}$

$$f(x, y) = xy^2 + x^{101} + \varphi(x, y)$$

がゼロ近傍において同値なのは、多項式 $xy^2 + x^{101}$ であり、 xy^2 ではない。

この問題の特異性は、次の謎めいた例によってさらに強まる。関数

$$f(x, y) = 3x^{2} + 2x^{3} - 6xy^{2}$$

$$g(x, y) = 3x^{2} + 2x^{3} - 6xy^{2} + \varphi(x, y)$$

について検討しよう。ここで、 $\varphi(x,y)$ の展開式には4次以上の項しか存在しない。

一般的な場合には、関数fと関数gは同値でないことがあり得る。言い換えると、ここでは、関数gの臨界点の性格を決定するためには、2次項プラス3次項だけでは足りない。ところが、 $\varphi(x,y)$ の展開が5次項からしか始まらない場合には、fとgは同値なのだ!

3. 氷山の水中部分

分岐に関する研究は、しばしば静力学の課題、すなわち関数 $F(x,\varepsilon)$ の特異点の検討に向けられている。その検討には沢山の興味深い問題があり、そのため動力学に向ける力はもはや残っていない。とは言っても、分岐理論の重心はもちろん動力学的領域にあり、その領域はかなり広い。

ときには、最初からいかなる動力学も存在しない課題においてさえ、「静力学的」な観点からの検討だけでは足りないことがある。その例として、図31に描かれているブロックダイアグラムを検討しよう。ここでのフィードバック回路では、

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & (y > 0 \mathcal{O} \succeq \tilde{\Xi}) \\ -\sqrt{-y} & (y < 0 \mathcal{O} \succeq \tilde{\Xi}) \end{cases}$$

の関数変換器が使われている。

この系の入力と出力の間の合成フィードバックは等式

$$x + f(y) = y$$

によって決定され、これが図32に描かれている依存関係をもたらす。

¹⁾ 以下の例は *Poston, Tim and Stewart, Ian.* Catastrophe Theory and Its Applications. 1978 の露訳版(モスクワ, Mir, 1980)からの引用である。[邦訳版: I.スチュワート, T.ポストン『カタストロフィ理論とその応用』(野口広訳, 理論編: 1980, 応用編: 1982, サイエンス社)]

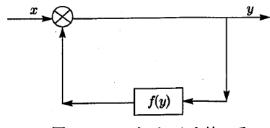


図31 フィードバックを持つ系

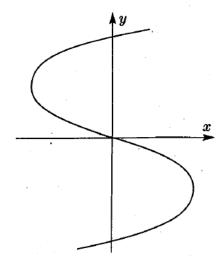


図32 非一意性のサプライズ

この系のすべての構成部分は決定づけられており、互いに一意的であるにもかかわらず、意外にも、出力yは入力xによって決定されないことが判明する。入力と出力の関係は多義的なのだと呑気に宣言したところで、それによって問題は解決されない。出力yは具体的には何と等しいのか?という疑問は、答えられぬまま残っているからである。なにしろ、現実の系においては、y の値が決定されなければならないのだ。それゆえ、実践的な場においては、その動力学を記述し、「寄生」容量、インダクタンス、等々を考慮せよ、という形に課題を明確化しなければならなくなる。

動力学的角度からの検討でさえ、それだけでは不十分になることがある。図 31 に描かれている系において、時間は離散的であり、fは、入力信号がy[k]のとき、出力側において信号y[k]-y[k-1]を与える動力学的ブロックであるとしよう。すると、バランス関係

$$x[k] + y[k] - y[k-1] = y[k]$$

から、y[k]=x[k+1] (!) が導き出される。このブロックダイアグラムは、まさに未来を予言しているのだ。もちろん、許される行動の範囲内に踏みとどまる [=変人と思われない] ためには、動力学のより精密な記述に移行し、寄生パラメーターをもう一度考慮し直す必要がある。そして一番肝心なのは、そのプロセスを始動させることだ。

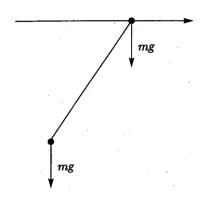


図33 パンルヴェのパラドックス

この問題を考える際には、多数の例が有益な示唆を与えてくれる。例えば、水平な直線に沿って「乾燥」滑りすることのできる支持点を持った振り子(図 33 参照)が運動するときに生じる、パンルヴェのパラドックス。ここで出会う不愉快な出来事を詳しく記述するためには多くの紙幅が必要とされるが、我々にとっては概要だけで十分だ。つまり、その動力学の解析が示すところによれば、(振り子が左側に傾いている場合には)支持点の左側への運動(\dot{x} <0)は不可能であり、右側への運動は非一意的となるということだ。ニュートン力学を救済するためには、またもや単純化されたモデルの枠外に出なければならなくなる。

さて次に、分岐はいったい何に伴って生じるのかを説明する必要がある。それは要するに、モデル (9.1) の境界内においては、現実の系がどのように振る舞うようになるかは必ずしも明らかではないということだ。 ε が変化すると、突然、「警告灯」が点滅し始める。それは次のどんな場合でも起こり得る。

- 有限な時間の間に、解が無限大に向かって行く(または無限大からやって来る)。
- モデルが未来を予言し始める。
- ・ 解が分岐する (どの解を選ぶのか?)。
- 方程式が解けないようになる(解が存在しない)。

いずれの場合にも、(9.1) の領域から見ると現実の系は謎に見える。最初のモデル設定の枠外に出て、課題をもう一度考え直さねばならない……。ついでに言うと、未来を予言するモデルからは、フィードバック回路における信号のタイムラグがより大きな不可解さを引き起こす可能性があることを、多かれ少なかれ明確に読み取ることができる。そのようなタイムラグがパラメーターとして取り扱われる場合には、分岐に関する課題において深刻なハプニングと遭遇することを予期しておかねばならない。

分岐に伴う意外性それ自体が、ほとんど常に物忘れと関係している。モデルの方程式を 導出する際になされていた明示的、非明示的な仮定は忘れられてしまう。通常、微分方程 式による記述が「プロセスが既にスタートし終えている」ことを想定してなされているの に対し,「プロセスのスイッチオン」段階は, 物事をすっかりだいなしにしてしまう性質を 持っている。定常モードへ通じる道が存在しないことが, 往々にしてあるのだ。

注記と補足

次の2つの多項式

$$f_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$$

 $f_2(x, y) = x^2 - y^2$

は退化している。1番目の多項式はx=yのときにゼロになり、2番目の多項式はx=yのときもx=-yのときもゼロになる。

2 つの間には原理的な違いがある。関数 f_2 は鞍部を決定し、臨界点の鞍部としての性格は、3 次以上の項の追加によって損なわれない。言い換えると、 $\varphi(x,y)$ のテイラー級数が 3 次以上の項から始まる任意の関数

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + \varphi(x, y)$$

もまた、鞍部臨界点を持っている。しかも、ゼロの近傍において

$$f[x(u,v), y(u,v)] = u^2 - v^2$$

であるような非線形座標が必ず存在する。

1番目の多項式 f_1 については、そのようなことは何も言うことができない。 f_1 へのより高次の項の追加は、いずれにせよ、臨界点の性格を変化させる可能性がある。

関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ における非退化臨界点の一般的場合には, f(0) = 0 を条件として,そこにおいて f がゼロの近傍において

$$f = z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 + \dots - z_n^2$$
(9.3)

の形を持つような非線形座標が常に存在する。

この結果はモースの補題として知られている。(9.3) の形の関数は**モースの鞍部**と呼ばれており、これが構造的に安定した臨界点に完全にけりをつけている。

第10章 無限大へのもう一つの突破口

人が沢山の公式を書くのは、問題を 理解していないときだ……。

ニールス・ボーア

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

あるいは

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

といったタイプの無限級数への関数の展開は,数学者たちを関数の無限大的な本性に関する思考へと,かなり急速に導いた。

その根底には,有限次元の場合

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

(ここでx, は座標, e, は基底ベクトル) とのアナロジーがあった。関数項級数

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots$$

において、数値c: は座標、関数 $\varphi_i(x)$ は基底ベクトルとみなすことができる。

結局,この単純素朴な判断が関数解析学の創出をもたらした。研究の過程で,よくあるように,例えば基底ではなくて計量を与えることにより,まったく別のやり方で事を進めることが可能なことが明らかになった。いずれにせよ,幾何学的な思考様式が関数の普通の研究に導入された。関数の集合を取り扱う際,平面,球体,円錐といった概念が効果的に用いられるようになった。

 $R^3 \Rightarrow R^n$ (n > 3) の移行の場合とは異なり、「無限大への関数的なステップ」には著しい損失が伴った。

1. 犠牲

主な損失は次の点にあった。有限閉領域 X における連続関数は, R^n においてその最大値と最小値に達する。これは,最適化にとってきわめて重要な性質である。まさにそれゆえに, R^n においては,

$$\max_{x \in X} f(x)$$

の決定という課題は、解の存在という問題にはけっして突き当たらない。無限次元に関する課題においては、これは深刻な頭痛の種なのだ。

例えば、気体流に対する抵抗が最小である回転体を求めるための、汎関数

$$J = \int_{0}^{1} \frac{x \, dx}{1 + (y')^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

の最小化というニュートンの変分問題は、解を持たない。なぜなら、J>0であるが、しかし

$$y_n(x) = x + \sin^2(n\pi x)$$

の場合には $J_n \to 0$ となるからである。

もう一つの原理的な違い。*R*ⁿ においては、球面を連続的変形によってそれ自体に沿って 1 点に収縮させることは不可能であり、このことが方程式の可解性に関する結論にとって の基礎となっている。無限次元空間ではそんな手品が可能なのだ。例えば、

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 1$$

であるような連続関数 f(x) からなる,C[0,1] における球面について検討してみよう。変形は3つのステップで行う。ステップ1では,f(x) を

$$f_1(x) = \begin{cases} f(2x) & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$
の場合
$$f(1) & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$
の場合

に変形しよう。このとき、変形

$$h(\tau, x) = \begin{cases} f(\tau x) & x \in \left[0, \frac{1}{\tau}\right] \circlearrowleft 場合 \\ f(1) & x \in \left[\frac{1}{\tau}, 1\right] \circlearrowleft 場合 \end{cases}$$

を用い、 τ を1から2まで変化させると、図34aの関数は図34bの関数に移行する。

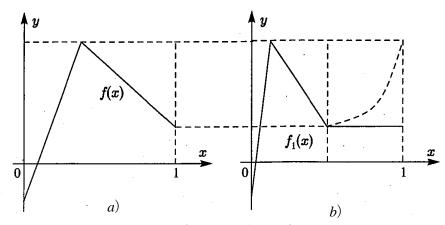


図34 無限次元球面の変形

ステップ 2 では、すべての $f_1(x)$ が関数 $f_2(x)$ に変形される。 $f_2(x)$ のグラフは $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ においては $f_1(x)$ のグラフと一致しているが、右端は、 $f_2(1)=1$ となるように上部の「天井」まで滑らかに上がって行く(図 34b の傾斜した破線)。

次に(最終ステップ), $f_0(1)=1$ ならば、すべての関数 $f_2(x)$ は球面に沿って任意の点 $f_0(x)$ に収縮する。変形としては

$$H(x,\lambda) = \lambda f_0(x) + (1-\lambda)f_2(x), \quad \lambda \in [0,1]$$

を用いることができる。

2. 関数解析



M.クレイン, 1907~1989

関数空間という概念の前面への押し出しは、アクセントをシフトさせ、新たな方向への推力を解析に与えた。皮相的な眼差しにとっては、科学の諸領域の発展におけるこのような類の転換期はまったく目につかない。なぜなら、それまでとは若干異なった視角からの議論であることを除けば、そこで議論されているのは以前と同じ課題だからである。最初のうち、そのメタモルフォーゼにおいては、プラスよりマイナスのほうが多いように見える。しかし長所が少しずつ蓄積されていき、そして進化的飛躍が起こる。突然、宮殿が建っていることが判明する。

関数空間の役割は、実数が果たしている役割に似ている。実数は、それ自体としては誰にとってもそんなに大量に必要とされているわけではないが、数学を変貌させ、活気づけている。無限の精度による計算など必要ない、通常の実務で必要とされるのは小数点以下せいぜい数桁なのだから、無理数などなくてもやっていけると思えるのは、最初にちらっと見たときだけだ。

しかし、実数が必要なのは、けっして計算のためではない。実数の主な役割は、多数の数学的ツールを稼働可能にすることにある。最も深いレベルにおいては、それは極限移行に対して合法性を与えるということであり、このことが微分、積分、sinx、等々といった関数の利用を保障しているのである。

状況を若干簡単化して説明すると、解析全体は極限の概念に依拠しており、そのために は直線が途切れなく続く道路に似ていることが本質的な重要性を持つ、と言うことができ る。もっぱら

$$a_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$



ゲルファント, 1913~2009

といったタイプの有理数列のみを検討する場合でさえ、蒸気機 関車が枕木から枕木へとスキップしないようにするためには、 分数の集合に継ぎを当てることが重要になる。

このように, 算術演算と極限移行の実行可能性を要求するの であれば、自然数列から始まったプレイグラウンドの拡張は複 素平面を与えることになる。第1章では、極限移行は背後に留 まっていた。

次の一歩は、関数数列の極限の研究である。気楽な旅への期 待はここで急速に消え失せる。状況は根本的に異なっているこ とが判明するからだ。関数のためのプレイグラウンドの拡張は

様々な方向に向かって行えることが明らかになる。何百ものバリエーションが生じる。そ れぞれには固有のプラスとマイナスがある。その結果、関数空間はあちこち目移りするほ どの数になり、あんまり多すぎやしないかと思えてくる。しかしこの場合には、品揃えの 幅広さはポジティブな役割を果たす。なぜなら,援助提供の標準シナリオは,まさにこの 幅広さに依拠しているからだ。



シュワルツ, 1915~2002

議論が微分方程式について進められているとする。何もかも うまくいかなくなったとしよう。解が存在するのかどうかも分. からない、等々。通常、災厄の原因は、課題が正しく設定され ていないことにあるものだ。関数解析は、課題の検討を行うべ き空間を指定する。そこではすべてがしかるべき場所に収まら なければならない。もちろん、「救済事業」の規模について語る 必要がある。なぜなら、一般的な話題の背後に、実は、ある大 学受験生が2つの課題を解くのに力を貸すという特殊な話題が 隠れていることが往々にしてあるからだ。その場合、「救済事業」 の規模は若干広がる。「患者」たちの中には、いくつかの大きな

研究領域が含まれている。

例えば、変分法。今からわずか40年前、この領域では「疑わしい」関数を探すという単 純素朴な方法が支配していた。解の存在という問題は研究されていなかった。そのための 思考のツールも座標格子も存在しなかったのだ。そのような課題を正しく設定することが いかに必要であるか、いかなる空間において検討を行うべきか、……等々についての理解 を与えてくれたのは、関数解析だった。変分法の理論は丸ごと変貌した。

患者のリストには積分方程式、微分方程式、方程式論、数理物理学、その他沢山の領域 を追加することができる。

3. 超関数



ソボレフ, 1908~1989

超関数には特別に取り上げて論じるだけの価値がある。ある時期まで、諸概念の発展は、グラフを持っている何ものかとしての関数という理解の枠内で進んでいた。もちろん、そこにはある種のこじつけがあった。連続関数、次に可測関数、あるいは、あるべキ乗の可積分関数……、いたるところ一意的には定義されていない関数……。しかしいずれにせよ、f(x)は、ほとんどいたるところで引数xに対応して

$$y = f(x)$$

が成り立つことを意味していた。

しかし対応というイデオロギーは、かなり幅広い部類の課題において機能していなかった。「水を濁して」いたのは、主に、いわゆる δ 関数である。この関数は点源の密度に対応しており、そこには充実した内容があったものの、数学的に合理的な定義に服従しようとはしなかった。

見出されたこの状態からの打開策は標準的なものではなかったが、関数空間論の立場から見れば自然なものだった。超関数は、「良い関数」のある所与の空間 $\mathfrak o$ 上における線形汎関数として定義された。特に、この場合における $\mathfrak o$ 関数は、任意の関数 $\mathfrak o$ $\mathfrak o$ に関して

$$\int_{0}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

という規則に従って作用する汎関数であることが判明した。

もしかしたら、この話全体はちょっとスコラ哲学や科学もどきのような匂いがすると指摘する人がいるかもしれない。いわく、 δ 関数を釣り鐘型近似(図 35 参照)の極限として理解する、通常の理解の仕方もそれと同じ結果に導いているではないか、と。もちろん、 $\epsilon \to 0$ のとき、 $\delta_{\epsilon}(x)$ のいかなる合理的な極限も存在しない。しかし、その極限それ自体は

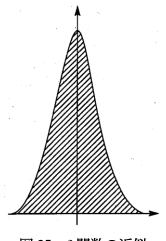


図35 δ関数の近似

まったく必要とされていない。なぜなら、通常、議論の対象となるのは、ある方程式

$$Lu(x) = \delta(x) \tag{10.1}$$

(ここでLは微分演算子)の解であるからだ。(10.1)の右辺において $\delta(x)$ を $\delta_{\varepsilon}(x)$ に置き換え, $u_{\varepsilon}(x)$ によって当該の解を表すとすれば,原則として

$$\varepsilon \to 0 \mathcal{O} \ \xi \stackrel{*}{\underset{\sim}{\circ}} , \quad u_{\varepsilon}(x) \to u^*(x)$$
 (10.2)

となる。これはまさに、求められている結果に他ならない。このとき、 $\delta_{\varepsilon}(x)$ が収束しないという災厄はまったく生じない。

今述べたことには同意する必要がある。しかしそれは,「解であることを疑わせる」曲線の探索と結びついた,あの最も単純素朴な見地に立っている。存在の問題,安定性の問題,その他沢山の問題がまだ背後に残されている。作業は手探りで進められる。 $u^*(x)$ はいかなる意味で(10.1)の解なのか,そして本当にそうなのか? それ以外の解が見落とされていないか? 言い換えると,解が言い当てられた可能性はあるが,しかしまさにここで,それよりはるかに大きな事柄——「自家栽培」された方法がたまたま与える状況の理解ではない,真の状況の理解——が必要とされていることが判明する。

さらにもう一つの論拠を付け加えることができる。(10.2) の極限移行を個別の場合ごとに根拠づけるために、いったいなぜ時間を費やさなければならないのか? すべての課題に関して、なぜそれをいっぺんにやってしまわないのか? しかし、前段で述べた事柄を背景として見た場合、そのような些事には、本腰を入れて語るだけの価値はおそらくないだろう。

第11章 歴史のDNA

聖書は、地球は平らだと主張していたのと 同じ人間たちによって書かれた。

XYZ

歴史全般と同様、数学の歴史は捉えどころのない代物だ。年代、事象、名前は見せかけだ。主要なプロセスは背後に隠れている。捉えようとすると、蜃気楼のように消えてゆく。 人生はこの背後に隠れた流れに加わるために過ぎてゆくが、普通、うまくはいかない。実は、我々は今、その見えないものに合流しようと試みているのだ。それは、努力の節約(俗に言う、「来週の月曜日からはちゃんとやります」)のためだ。そのための不十分ではあるが不可欠なノウハウ――それは、過去に戻るために「歴史の大河」に足を踏み入れ、ちょっと泳いでみることだ。

もちろん,それはそんなに簡単なことではない。感覚,想像力,瞑想が必要とされる。「馬鹿馬鹿しい」と若者は言うだろう。それは正しい。しかし部分的にだ。中世における数学の発展の諸段階を追体験することは、きわめて有益な訓練になる。その訓練が何を発達させるのかを説明するのは難しい。しかしその結果、今日吹いている「順風」を捉える能力が出現する。

1. 第5公準



ユー ファット, 紀元前 4~3 世紀

非ユークリッド幾何学の誕生は、物事を深く考える訓練にとって最も適切な例の一つである。その歴史は古代ギリシア時代、平行線に関する第5公準

「(E5) 直線外の 1 点を通り、その直線と交わらない直線は 1 本しかない。」

からユークリッド幾何学を解放しようとする試みから始まり、それから 2000 年後、(E5) を公理

「(L5) 直線外の1点を通り、その直線と交わらない直線は少なくとも2本ある。」

に置き換えたロバチェフスキーの新幾何学の構築によって終わった。

当初以来,長い間,公準(E5)を定理として証明すれば,この 公準を放棄することができると考えられていた。

2. 暗中模索



N. ロバチェフスキー, 1792~1856

この課題はある点で麻薬に類似していた。その単純さで人々を魅了したが、捕まらなかった。沢山の人々の人生がこの課題のために費やされた。情熱の白熱は18世紀に頂点に達した。解決の機が熟し始めた。あちこちで推理や洞察が現れ始めた。もしかしたらそれは洞察ですらなかったかもしれないが、ともかく探索の手は「ホットな」ところに近づき始めた。

大きな問題が解決されるときには、しばしばそのようなことが 生じる。それはまるで、文明が単一の生物有機体として課題を解 決しているかのようだ。地理的に離れた複数の場所で、いくつか の躍動が同時に生じる事実がこれを物語っている。

イタリアの修道士サッケーリは、背理法によって(E5)を証明しようとして、すなわち (L5)を仮定する方法で研究を行い、ロバチェフスキーの道を進んでいた。研究結果は1733年に発表されたが、そこからの帰結は何も生まれなかった。

それと類似した流儀でさらに徹底的な試みを行ったのは、ドイツの数学者ランベルトだった。サッケーリと同様に背理法を用いることにより、ランベルトはロバチェフスキー幾何学の諸結果のかなりの部分を得た。しかし彼はそれによって何をなすべきかを知らなかった。所望の矛盾が発見されなかったため、彼は、そんな幾何学はある種の仮想的球面の上にしか存在し得ないだろうという、意味不明な憶測すら言明した(1766年)。

次に、「別の」幾何学の創出のすぐ近くまで到達した何人かの数学者が現われた。完全に「ホット」になったまさにこのとき、別の幾何学を構築することは可能だという 100%の確信を持ってロバチェフスキーが登場した。では、彼はいかなる宇宙的課題を解決したのか? 幾何学そのものを構築したのか? そう、構築した。しかしそれは宇宙的スケールの幾何学ではなかった。しかもそこには、特に難しい定理はなかった。問題は、定理にはなかったのだ。

最も深遠な問題は別の点にあった。人類は幾何学を世界の客観的現実として受け止めていた。点、線、平面の抽象的記述についていかに多くのことが語られようと、それらの解釈は明示的であれ非明示的であれ、物理的な解釈だった。視覚的経験と一致しないすべてのものは斥けられていた。嘲笑さえされていた。

3. 愚弄的な定理

ロバチェフスキーの「大騒ぎ」は、最良の場合でも奇行としかみなされなかった。誰かが「1=2である」と宣言し、「あらゆる数はゼロに等しい」といった類の命題から様々な

帰結を導出し始めたと想像してみてほしい。ロバチェフスキーがやったのは、それと同じことではないか? 彼は「1=2」タイプの公理を宣言し、「3 角形の内角の和は π より小さい」、等々といった愚弄的な定理を証明し始めたのだ。

その際、人々を苛立たせたのは、それが確かに無矛盾なことだった。もしそれが公理「1=2」を主張するひょうきん者なら、そいつの鼻をひっつかんで「算術のいろはとの不一致」のカテゴリーに押し込み、やすやすと厄介ばらいできたはずだ。ところがここでは、不一致はいくら待っても姿を現さなかった。なにしろ、ここで問題とされていたのは、得られる結果と幾何学上の豊かな経験との間の食い違いではなく、他の公理との間の矛盾だったからだ。公準(L5)は最初から経験とは一致していなかった。それゆえ、その公準から導き出される帰結が、その公準と同じ種類に属する帰結だったとしても、それに文句を言われる筋合いはなかった。もし仮に、何か「2つの点を通るように2本の直線を引くことができる」といった類のことが帰結の中に見つかったとしても、それは別の問題だ。そのときには、新幾何学は崩壊し、公準(E5)が半分だけ定理に転化するはずだり。サッケーリとランベルトが探し求め、しかし見つけられなかった矛盾とは、まさにそのような矛盾だった。

それとは逆に、ロバチェフスキーは矛盾はないと確信し、矛盾を探さなかった。彼の立場のいくらかの弱みは、彼が自分の幾何学を仮想的なものとみなしていたことにあった。つまり、無矛盾ではあるが、おとぎ話的な理論を構築したというわけだ。その後、客観的世界の幾何学という考えが彼に生じたことは言うまでもない。しかしそれはやはり、本格的なレベルにおいては他の役者たちの領分であることが判明した。

今述べたことから、歴史がロバチェフスキーで終わることができなかったことは明らかだろう。突破口は形成されたが、歴史のプロセスはその完成を求められていた。その「おとぎ話」がいつ何時「はったり」に転化するかもしれなかったことは、指摘するまでもない。2つのアキレス腱が残されていたからだ。

第1に、 論理構造の正しさを証明するモデルが必要とされていた。

a+b=b+a

の形の公理を持つ算術の場合には、論理構造において与えられている算術的操作を持つ数が、 モデルの役割を果たす。そのようなものが求められていた。論理構造を現実化させるモデルが 存在しない限り、論理の手品は幻想であり続けるからだ。

第2に、無矛盾性の問題がダモクレスの剣を垂れ下げていた。もちろん、ゲーデルは無矛盾性はそもそも証明不可能であること(第14章参照)を証明したが、そこでの状況は特殊なものだ。ユークリッド幾何学の無矛盾性も明白というわけではないが、しかしそこでは、現実的なモデル、直観、そして何世紀にもわたる経験の存在が、ある程度の幸福の保証の役割を果た

¹⁾ 「半分だけ」なのはなぜか――それは、「任意の2本の直線は交わる」という、もう1つ可能な別の予想も切り捨てることが必要になるからだ。

していた。ロバチェフスキーの場合はと言えば、いかなる支えもなかった。直観は、あっちの ほうでは「賛成」、こっちのほうでは「反対」と言う。

緊張が高まった。状況は解決を必要としていた。仮想的球面という着想が再びいきり立ったが、それを明確に表現することはできなかった。そしてようやく1868年(ロバチェフスキーの最初の論文から40年余り後)、ベルトラミがついに、新幾何学は一定の負の曲率を持つ表面上において実現され、解析と同程度に無矛盾であることを示した。

問題のこの解決は、幾何学者たちを完全には満足させなかった。これにはある理由があった。彼の議論は依然として、擬球面におけるロバチェフスキー幾何学の局所的実現をめぐって(一部分ずつ小分けにした形で)進められていたからだ。

4. クラインの手品



F.クライン, 1849~1925

それから間もなく、クラインが天才的に単純なモデルをひっさげて登場し、状況は完全に透明になった。クラインは平面として円の内部を、直線として弦(当然、この弦は端点を持たない)を提案した。AB(図 36 参照)と交わらない直線(弦)の東全体が点 C を通る。

ロバチェフスキー幾何学のモデルとは、まさしくこういうものだ。誇張なしに、最高の飛行術だ! しかも、このモデルは普通の幾何学の一要素として構築されている以上、普通の幾何学と同程度に無矛盾なのである。

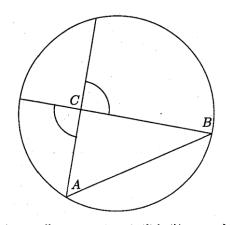


図36 非ユークリッド幾何学のモデル

5. メダルの裏側



J.ボヤイ、1802~1860

ここまでの叙述において、我々の注意の焦点は様々な着想の流れに当てられていた。何が、どのように? どんな障害が? 流れは適切な場所に運んでくれたか、どっちを向いていたか? なぜ長くかかったのか? ドラマツルギーはどこから得たのか?

そのような角度から見た場合、役者は二次的な存在だ。それゆえ、我々は多くの人物について言及すらしなかった。しかしそこには、歴史のプロセスの偉大な参加者たちがいた。ロバチェフスキーと同じ結果を得たが、運命の意志によって二番手に留まったボヤイ・ヤーノシュ。「それよりずっと前」に草稿の中でそれ

と同じ幾何学を構築していた偉人中の偉人ガウス。既に 1854 年, 新たな幾何学的アプローチに関する傑出した講演を行っていた天才リーマン。そのアプローチの枠内においては, ユークリッド幾何学もロバチェフスキー幾何学も単なる個別的事例にすぎなかった。

実は、リーマンの講演を理解した者は誰もいなかった。もしそうでなかったとしたら、さらに 14 年間もベルトラミの結果を待たずにすんだはずだ。興味深いことに、リーマンの講演が著者の死後に出版されたときには(ちなみに、ベルトラミの結果が発表されたのと同じ 1868年)、その資格を有する者は皆、即座にそれを理解することができた。

しかしそれは、この本の内容と形式に合致しない領域に属する別のテーマだ。宇宙の意図を演じる役者は、一人で二役を演じている。彼はまだ食事中なのだが、それと同時に眠っていて、毛布を自分の方に引き寄せている。好意的な立場から見た場合には、これは共感の微笑をさそう。なんとなれば、自然とはそういうものだからだ。この壮大な光景を見守ること――それは満足感であり、科学である。でもそれは、この本でやっているのとはまったく別の授業科目だから、それは「数学の歴史」とは呼ばずに、何か別の名前で呼んだ方がいいだろう。

それからまた、「最初にAと言ったのは誰か」という問いを発するのはやめた方がいい。 その質問は常に雰囲気をそこなう。マーフィー-パーキンソンタイプのある法則は、皮肉な 調子で次のように主張している。**第一発見者という名前を付けられた者は存在したことがない。**

では、そのどこがいけないのか? ましてや、そんな法則があるというのなら。答え:例 えば、ダーウィンの自然選択の着想は既に古代人に見られる。アインシュタインの公式

$$E = mc^2$$

はヘビサイドによって、ボイルーマリオットの法則はフックによって発見された。ローレンツ変換を発見したのは誰だったか思い出すのは難しいが、いずれにせよ、それはローレンツではない。



ガウス, 1777~1855

そして、問題は剽窃にあるのではない。「私は巨人たちの肩の上 に立っていたのだ」というニュートンの言葉は、ひらめきに対し て常に適用することができる。着想が準備段階や誘因、プロトタ イプなしに個々人の頭の中に生まれた事例は一つもない。そうだ としたら、どうするべきか? 巨人たちの肩から降り、それからの 全人生を彼らにぺこぺこしながら過ごすのか? 皆が皆,そんなこ とをするのが気に入っているわけではない。しかも、天秤のどっ ちの皿のほうが重いのか 「科学上の発見に様々な形で関与した人々のうち、 誰が最も重要か]を忘れてはならない。ガウスとニュートンに対して は、すべてを許すことができる。すべての人間に対して、すべて

を許すことができる……。ましてや、この問題を子細に検討してみると、許したり許さな かったりするようなことなど存在しない。外部から与えられたものを、誰の勘定に付ける のか? 宇宙のリズムやつぶやき声は外部から与えられたもののうちに含めないとしても, 言語、ステレオタイプ、他家受粉を……。宇宙の法則を人間のつかの間の名前で登録する のは滑稽ではないか?

三、四百年前には、この点に関する雰囲気はもう少しましだった。様々な発見が次から 次へなされたが、それらの発見に対して、今のような嫉妬深い態度は取られなかった。例 えば、先ほど触れたフックは数百の発見をなし遂げたが、彼はご褒美として何を手に入れ たか? 何が彼の名前で呼ばれているか? たった一つ,「力は伸び縮みに比例する」という 弾性の法則だけ、これがすべてだ。ただし、この件で警鐘を鳴らすことに道理はない。そ こには特殊な内部事情があった。王立協会がフックに対して新たな自然法則を定期的に公 開することを義務づけていたのである。滑稽話と紙一重の話だ。いずれにせよ,フックは 契約の圧力の下で,きわめて高い回転速度を維持することを余儀なくされていた。一般的 な見地から考えてみると,彼は,何か多少のことは自分で考えついたのだろうし,またあ るときには法螺を吹いたり、図々しく嘘をついたりしたのだろうと推定するのが合理的だ。 なぜなら、部分的には存在が意識を決定するからだ。それゆえ、どこで何がとか、何が誰 のものとかいった問題をここで解決しようとするのはこの場にそぐわないし、そこから何 か新たな展望が開けるようなことでもない。

それだけでなく、ここで最も重要な側面(!)は、それぞれの発見には、何か臨界質量 のようなものがあるということだ。臨界質量に達していないうちは、語るべきことは何も 生じない。誰かがかくかくしかじかであるに違いないと考えたとしても,あるいはそれを 確信さえしたとしても、そこには何もない。それは望ましいことではあるが、発見ではな い。ついでに言うと、重力による引力が距離の2乗に逆比例しているに違いないと最初に 考えたのは、実際はどうやらフックだったらしい。フックはそれをニュートンに話した。 そしてこのことが後年、優先権をめぐる大論争を引き起こした。

ロバチェフスキーについて言えば、非ユークリッド幾何学のまさに臨界質量を最初に通り越したのが彼であることに、疑いの余地はない。

6. いくつかのディテール



リーマン、1826~1866

再び「着想の流れ」に話を戻すに当たっては、いくつかのディテールに注意を払わなければならない。この本の前の方のどこかで、我々は「嘘は説明のための最良のツールである」という事実を利用した。しかし、それは戦術的に利用しただけだ。戦略的には、真実を語ったほうがより有益だ。なぜなら、急いで理解した事柄は、翌日には解決不可能な難問に転化してしまうからである。クラインのモデルをめぐっては、そのような危惧が生じる。iの上に点を打とうとすると、それによって様々な問題が発生する可能性がある。何が問題なのかと言うと、第5公準(L5)の正当

性だけでなく、それ以外の公理の正当性にも気を配ろうとすると、運動、距離および角度を特別なやり方で――射影変換にもとづいて――定義しなければならなくなるのだ。例えば、普通の距離の代わりに、いわゆる4点の非調和比が取られる。それが何なのかは重要ではない。それはただ単に、一匹の悪魔がそこに潜んでいるディテールにすぎない。そこには複雑なことは何もないが、単純さがぼやけ、不可解さのための広大な空間が生じる。そのため、若きクラインはワイエルシュトラスの演習の授業(1870年)で肘鉄砲を食わされた。そしてクラインが「状況を掌握」したのは、それからようやく1年後のことだった(ただし、それ以後も彼に対する敵対者は存在した)。

このような類の例においては、単純な物事でさえ壁に突き当たり、敵意をもって受け止められることが稀ではないのはなぜなのか、その理由を理解したいものだ。物事を究明しようとする試みは、常に探偵小説に似ている。描像を根底から変化させるようなディテールが表面化する。この場合もそうだ。第1に、実は、クラインのモデルはクラインによってではなく、ケイリーによって、ただし別の目的――射影幾何学の領域におけるある着想の実現という目的――で発明されたのだ。クラインの頭には、このモデルにもとづいてロバチェフスキー幾何学が実現されるという考えは浮かんでこなかった。第2に、当初の目的に従ったモデルの設定の仕方が、ほとんど神秘的と言えるような役割を演じ続けた。クラインは非ユークリッド幾何学の実現という一事だけでは満足せず、諸幾何学(ユークリッド幾何学、ロバチェフスキー幾何学および射影幾何学)の相互関係の分析という密林の奥深くに入り込んだ。そこでは混乱が生じ、その結果、ケイリー自身も含めた敵対者が多数出現した(ただし幸いなことに、優先権をめぐる紛争は生じなかった)。

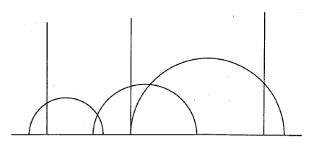


図37 ポアンカレのモデル

概して言えば、ポアンカレのモデル(図37参照)を含めなければ、事象の描像は不完全に なってしまうのだが、これについては簡単に言及するにとどめよう。このモデルでは、図に示 されているように、例えば、開いた半平面が「平面」であり、半円および(半径が無限大の半 円としての)垂直な半直線が「直線」である。

(L5) の正当性は容易に検証される。それ以外の公理に関してはいくつかの障害が生じる。 それらの障害はエレガントな形で克服されるものの、このモデルを若干複雑にする。ポアンカ レのいくつかの定義に自然性を与えるために、「温度のトリック」さえ発明された。第17章で はこれが利用される。

最後の問題。ドラマツルギーの効果は、常に叙述の順序に依存する。テキストの一部の 断片を配置し直すと、探偵小説が裁判記録になってしまう。記述されている歴史的プロセ スにおける諸事象のほんのわずかな再配置が情熱の白熱を消し去り、非ユークリッド幾何 学の格付けを著しく下げるかもしれない。その場合における原因が何なのか、また諸事象 を探偵小説としてまとめた著者が誰なのかは、知られていない。

第12章 本質の反映としての反応

シチョールキンが牝馬の鼻面を叩いてやると, 牝馬は尻尾を一回振る。

コジマ・プルトコフ [19世紀ロシアの4人の詩人 が共同で使っていた筆名]

破壊することなしに対象を解明したいのなら、その反応を観察する以外の方法はない。 対象に与える作用を発明し、何が得られるかを見るのだ。大部分の場合、結果は事前に分 かっている。問題は、その結果から何を導き出すかだ。

1. 速度分布



マクスウェル, 1831~1879

気体分子の速度はどのように分布しているのか? かつて,それはきわめて重大な問題だった。マクスウェルは試験の場でこの問題を半時間で解いたと、伝説は主張している。この問題に関する歴史をおおまかな形で再構成してみよう。

物理学的なディテールに言葉を費やさないようにするため、またそのついでに決定論に関する議論を避けるため、我々はこの課題を換骨奪胎してしまおう。というわけで、確率ベクトル $x=\{x_1,\cdots,x_n\}$ が未知の密度 p(x) で分布していて、その密度は次の2つの性質を満たしているものとする。

(i) x_iの値は独立である。すなわち,

$$p(x) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$$
 (12.1)

(ii) p(x) は x の方向に依存しない。

これらの性質は密度についてそんなに沢山のことを語っていないように思える。しかし 実は、これらの性質が密度を一意的に決定しているのである。

実際, (ii) からは

$$p(x) = p(x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

つまり関数 p(x) が導き出される。すなわち、

$$\ln p(x) = \ln p_1(x) + \dots + \ln p_n(x)$$
 (12.2)

は,領域

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \text{const}$$
 (12.3)

において一定である。

言い換えると、関数(12.2)と(12.3)は同じ等位面を持っているということである。それが可能なのは、それらの等位面の法線(勾配)が共線である(同一方向または反対方向

を向いている) 場合, すなわち $\nabla \ln p(x) = \lambda \nabla x^2$ である場合に限られる。このことはn個の等式

$$\frac{p_i'(x_i)}{p_i(x)} + 2\lambda x_i = 0$$

を与える。そしてそれらの等式を積分すると

$$p_i(x_i) = k_i e^{-\lambda x_i^2}$$

が得られる。

定数は、正規化を行い、次に例えば2次モーメント

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_i e^{-\lambda x_i^2} dx = 1 , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 k_i e^{-\lambda x_i^2} dx_i = \sigma^2$$

を与えることによって決定される。

最終的に次式が得られる。

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$$
 (12.4)

2. お説教

ここには、じっくり考えてみるべきことがある。プロとして成長するかどうかは、経験から教訓を汲み取るか否かにきわめて強く依存している。今言っているのは、情報が右の耳から左の耳に抜けてしまう、ということではない。例えば、前節に挙げた例が理解され、認識されることができたとする。しかし……その情報が分類されなかった場合には、その結果、その情報は必要とされる収納場所に収められず、そのため、ある一定の方向への思考の展開を誘発することも、新たな地平を切り開くこともない。もう一つ悪いのは、情報が沈黙してしまうことだ。

(12.4) の導出については、様々な観点から検討することができる。この場合に我々の関心を引くのは、あれこれの変換に対する不変性(非感受性)という角度からの検討である。本章の冒頭の「作用を与えよ、そして見よ」タイプの話は条件付きの話だ。そこでは、対象がそれに対して反応することのない、思考上の操作が暗に想定されている。普通、そのような作用(運動方程式、あれこれの関数、解、臨界値、等々を変化させない作用)を考え出すのは簡単だ。しかしその際、それはすべてトリビアルなことで、もう食ってしまった卵ほどの価値もないように見える場合がしばしばある。実は、対象がそれに対して反応することのない変換の種類を指定することは、きわめて多くの情報を与えてくれるのである。そして、主要問題は悲観論の克服にある。しかし実際の経験が示すところによれば、その克服は実に困難だ――必要とされるのはせいぜいのところ、「不変な変換にマルを付けて、帰結を導出せよ」という単純な規則に従うことだけであるにもかかわらず。

マクスウェルの成功の秘訣はまさにこのことにあるのであって、それに続く、勾配を取るための2行の式 [前節参照] にあるのではない。もし課題が「2つの条件 (i),(ii) を満たす関数 p(x) とはいかなる関数か」という形で設定されていたとしたら、学生の3人に1人が解ける(そのような関数 p(x) を選び出せという課題なら、2人に1人が解ける)だろうことは間違いない。難しさは課題の設定にある。そのためには、次の問いを自らに与える必要がある。「p(x) に関して既知とみなせることは何か?」 この問いの場合なら、あらゆる学生が (i),(ii) を指定するはずだ。しかし、ここでトラブルが発生する。懐疑論者は、自らにその先を考えさせることができない。彼には、そんな自明なたわ言からは何も導き出せないように思えるのだ。

もちろん、楽観論者は懐疑論者より少なくはない。しかし、彼らには懐疑論者とは別の 不幸がある。彼らは出発点をなしているその問いには興味がない。彼らが欲しているのは、 無から結果を得ることなのだ。

このように、マクスウェルの成功を決定づけたのは、粘り強さと組み合わされた、ごく平凡な思考の規律性¹⁾だったのである。彼は「……に関して既知とみなせることは何か?」と自問した。彼は利口ぶって独創的な答えを探すようなこと(これは研究者たちの圧倒的部分を密林に迷い込ませる)はせずに、2つの自明な性質(i)、(ii)を取り上げ、「この課題を解決するためにはそんなたわ言だけで十分なはずはない」といったタイプの感情に屈することなく、課題を解き始めたのである。

3. 原因と結果のコントラスト

分を時間に置き換えると、速度は60倍になる。これはあまりにもトリビアルな話なので、 言及するに値しないように思える。にもかかわらず、そんな類の分別(次元や相似にもと づいた方法)が物理学の難問を解決するのだ(第17章参照)。

座標系の回転やカウント開始点の別の点への移動は運動方程式を変えない。この金言は トートロジーのような印象を生じさせる。しかし、主な保存則(エネルギー、運動量およ び角運動量の保存則)はこの「トートロジー」から導き出される。

原因と結果のコントラストには常に驚かされる。まるで、壮大な結果は取るに足らない 原因に立脚しているかのようだ。しかし、そこには驚くべきことはない。結果は覆面をし ているが、原因は裸なのだ。例えば、

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1}$$
(12.5)

¹⁾ ちなみに、マクスウェルは彼の草稿に書かれている公式の各行に誤りがあることで有名だった。

という陳腐な事実は退屈感を催させるだけだ。ところが、(12.5) にあれこれの方法で迷彩を施すやいなや、そこからはオリンピックに出場させられるほどの結果が生まれる。例えば、 $\varepsilon_k = \operatorname{arct}_{gk}$ としてみる。公式

$$arctg u - arctg v = arctg \frac{u - v}{1 + uv}$$

から

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{1+k+k^2} = \arctan \frac{n}{n+2}$$
 (12.6)

が容易に得られる。さて今度は (12.5) を「マル秘扱い」にした上で, (12.6) を証明して みよう。それは容易なことではない。しかも, (12.5) から得られるそのような結果は 100 万もある。人生にはこれに似たことがしょっちゅうある。

創造主がそんなテクニックを用いたのか、それともそんなテクニックがひとりでに出来上がったのかはさておき、我々は(12.6)のタイプの事実を絶えず相手にすることを余儀なくされている。(12.5)の形の裸の原因も視野の中に入っているものの、それらの原因のポテンシャルはまったく目立たず、因果関係は目に見えない。だから世界は、歪んだ鏡でできた罠の中に閉じ込められているのだ。結果はその不可解さで人をあざ笑い、原因はその陳腐さのゆえに人に気づかれない。

ある領域で因果関係を巧みにあやつる能力を持っている者は、魔法使いの役割をやすやすと演じることができる。このことを納得するためには、かつて世を騒がせたオメガマイナスバリオン [Ω⁻粒子] の発見の歴史を思い出せば十分だ。ゲルマン(1969 年のノーベル物理学賞受賞者)はあるとき、新たな素粒子の発見の噂を聞きつけるやいなや、さらにもう1種類の素粒子の存在を(その性質も指定して)ただちに予言した。その素粒子は3年後に実験で検出された。このことは、ルヴェリエとアダムズがその軌道を事前に算出していた海王星の発見よりかっこよくさえ見えた。

その歴史の内幕は興味深い。量子力学はその草創期から、「何だか理解できないもの」が振動しているという状況にうまく対処していた(第 16 章参照)。量子論は前世紀半ばに大きく前進し、既に素粒子を「いかなるものか知られていない」シュレーディンガー演算子の固有ベクトルとして記述していた。実は、その未知の演算子においては、いくつかの性質――あれこれの変換群の作用によって変化しないという性質――が既知のものとして仮定されていた。今、我々の話のテーマは、まさに量子力学の主要な発展方向というテーマに到達した。

さて、その少し前に SU_3 群 ²⁾に取り組んでいたゲルマンは、**未知の**シュレーディンガー 演算子がそこで作用している空間の次元を、 SU_3 群がその空間において作用し、かつ新た

²⁾ 複素 3 次元空間の特殊ユニタリ群。

な固有ベクトルが1つ現われるような仕方で増やす必要があること 3 を即座に見て取った。ところがそのとき、さらにもう1つの「余計な」固有ベクトルが現われた。これが隠された真相だ。次にゲルマンは、オメガマイナスバリオンをめぐる成功の波に乗り、同じ SU_3 群を利用してクォーク理論を提唱した。そのクォークは今なお発見することができない。でもありがたいことに、待ちきれずに賞を与えてくれた……。

これらすべてのことは、直接的経験の限界を超えた世界認識という点でのきわめて模範的な例となっている。物理学のアヴァンギャルドは、周囲で何が起きているかを二次的な 兆候にもとづいて判断する、超人的才能を持った盲人を思わせる。

4. 不変性のイデオロギー

上述した「いかなるものか知られていない」シュレーディンガー演算子の研究に関する話は、辛辣な皮肉のように聞こえるかもしれない。しかしそれは違う。数多くの課題の場合、それを解決するためには、研究対象を記述する方程式は実際には必要ではない。このことは、次元や相似にもとづいた方法を用いる際に一目瞭然たる形で現れる(第 17 章参照)。微分方程式を目の前に置いて眺めることが有益なのは、所要のパラメーターすべてが視界に入っていることの保証として眺めるときだけだ。もし振動周期 T は l と g に対してしか依存し得ないことがまったく明らかであるならば、公式 $T = k\sqrt{l/g}$ はまさにそのように得られる。

微分方程式の解自体がそこでは求められる、別のクラスの課題が存在する。ここでも不変性のイデオロギーがよく働いてくれる。方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y \tag{12.7}$$

は,変換

$$x = x' - u$$
, $y = y' - 2u$

の作用によって変化しない。これらの変換は関数z=2x-yも変化させない。それゆえ、z=2x-yで置換すれば、ただちに(12.7)が単純化され、方程式

$$\frac{dz}{2-z} = dx$$

が得られる。この方程式は容易に積分できる。

もっと複雑な例は第2種アーベル方程式

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}y$$
 (12.8)

³⁾ 新粒子との関連において。

である。容易に確かめられるように、この方程式は変換

$$x = kx'$$
, $y = \frac{1}{k}y'$

に対して不変である。これらの変換は関数 z=xy に影響を与えない。それゆえ、変数 (x,y) から変数 (x,z) への移行は(12.8)を単純化し、容易に積分できる方程式

$$\frac{z\,dz}{z^2-3z+2} = \frac{dx}{x}$$

を与える。

熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

は変換

$$t = kt'$$
, $x = \sqrt{kx'}$

によって変化しない。これらの変換に対しては関数 $\tau=x/\sqrt{t}$ も不変である。 τ を用いれば,最初の偏微分方程式を常微分方程式

$$\frac{d^2T}{d\tau^2} + \frac{a\tau}{2} \frac{dT}{d\tau} = 0$$

に帰着させることができる。

最初、これらすべては、互いに無関係なばらばらのエピソードという印象を生じさせる。 それだけになおさらのこと、そのような種類の諸事実が整然とした体系に組み入れられているリー群の理論を知ると、満足感を覚えるものだ。ついでながら、その体系はあまりにも沢山の注意の焦点を自らに当てさせるという点で、部分的にはマイナスの役割を果たしている。つまり、話が不変性の問題に及ぶやいなや、注意がリー群と方程式の範囲内に閉じこもってしまうのである。しかし、不変な変換は数学全体に浸透しているのだ。

当たり前のことだが、例えば関数 f(x) が変換 H(x) に対して不変なら、すなわち

$$f(H(x)) = f(x)$$

なら、方程式 f(x) = x をそれと同値で、より便利となる可能性のある方程式 f(x) = H(x) に置換することを始めとして、沢山の有益な結果をこの事実から導き出すことができる。H タイプの変換がいくつか知られていれば、さらにいい。その例を挙げると、関数

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - x)^2}$$

は変換

$$H_1(x) = \frac{1}{x}, \quad H_2(x) = 1 - x$$

および

$$H_3(x) = \frac{1}{1-x}$$
, $H_4(x) = \frac{x}{x-1}$, $H_5(x) = \frac{x-1}{x}$

に対して不変である。これは内容豊富なセットであり、これを手元に持っていれば沢山の ことができる。しかし、それをどうやって見つけるのか?――似通った様々の状況の中で 不変な変換をどうやって探し出すのか、という意味で。それが常に問題になる。それゆえ、 多くの理論は反対の端の方から始める。まず変換の方から踊り始め、その後であれこれの 場合に何が変化しないかを眺めるのだ。それぞれの変換の背後では、通常、興味深い事実 からなるまとまった地層が掘り出される。

例えば射影幾何学は、かなり限られたタイプの変換——1点から平面への図形の射影(写 真撮影の場合のような) ――に取り組んでいる。美しい結果がずっしり重い何巻もの本に 載せられるほど沢山得られている。とは言え、元々の着想は表面の上に横たわっているよ うに思われる。当然のことだが、射影によって破壊される幾何学的性質は理論の枠外に置 き去りにされる。しかし、いくつかの性質は理論の枠内に残る。すなわち、直線は直線に、 3角形は3角形に移行し、いわゆる同一直線上の4点の複比や代数曲線の次数は保存する。 射影幾何学において解決し得る多数の難問をエレガントかつ容易に解くためには、通常は それだけで十分だ。

第13章 非線形現象

Gold's law: If the shoe fits, it's ugly.

XYZ

事態が語る声に従って進んでゆく道では、山々もたやすく道をあけてくれる。それゆえ、 流れがどこに向かっているかを感じ取る天賦の才がきわめて重要となる。

現在、非線形数学の世紀が訪れつつあるように思われる。「線形水源」の水が次第に汲み尽くされつつあること、コンピューターが登場したこと、手つかずの「無知」の空間に入り込んだこと――これらすべてが科学を非線形の大海原へと押しやっている。初めのうちは、この渦においては様々な可能性や現象の多様性の方が知性の限界を上回っていて、数学はその果てしなき空間全体に広がっていって「雲散霧消」してしまうのではないかと思える。どうやら、そうではないようだ。現状は、我々の手持ちの手段の多様性は、我々が解明すべき、天が定めた諸効果のちっぽけなリストを克服できる状態にはないように見える。カタストロフィー理論は、これに関する判断基準の役割を果たすことができる。非線形の悪しき欲望を許してみろ、いったんそんなことをしたら、可能性の数は数え切れぬほどになってしまうぞ、と思われるかもしれない。しかし、ノーだ。非線形の「急カーブ」の多様性は無限であるにもかかわらず、パラメーターが2つなら、カタストロフは2つ(カスプと折り目)しかないのだ。

1. アトラクターとフラクタル

アトラクターとは、吸引的集合のことを言う。例えば、写像 f(多価写像を含む)がある集合 X を自分自身に変換する場合には、 $k \to \infty$ のとき、連続写像 $f^k(X)$ はアトラクター A に収束する。そのとき、A は写像 f の不動集合 1 となる。すなわち、f(A) = A である。A 内において始まる動的プロセス

$$x_{k+1} = f(x_k) (13.1)$$

はA内に留まる。

U,が微分方程式系

$$\dot{x} = h(x) \tag{13.2}$$

の軌道に沿ったシフトの演算子であり、その演算子に不変集合 X が存在する場合には、アトラクターA は極限集合として再定義される。すなわち、 $t \to \infty$ のとき、 $U_t(X) \to A$ である。

¹⁾ 特に、Aはfの不動点となる可能性がある。

興味深いことに、単純な動的システム (13.1)、(13.2) の場合におけるごくありふれた状況において、アトラクターがかなり風変りな集合となっていることが稀ではない。例えば、カントール集合 K は 2 価写像 $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$ のアトラクターである。ここで、

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x$$
, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (13.3)

は線分[0,1]の2つの相似変換である。その結果、Kを変換fの不動集合として記述することができる。関数(13.3)が相似変換であるという事実には、集合Kは**自己相似性**を持つという事実が伴う。そしてこれが多数のアトラクターに特徴的なことになっている。

必ずというわけではないが,アトラクターはしばしば**フラクタル**である。フラクタルとは,マンデルブロによってそう名付けられた,**分数次元**を持つ集合だ。もちろん,ここで言われているのは普通の次元ではなく,いわゆるハウスドルフ次元である。これはおよそ次のように定義される。例えば,平面上の集合 A は, ε の側から正方格子によって覆われる。 $N(\varepsilon)$ は,A を覆うのに必要とされる格子の最小数を意味するものとする。 $\varepsilon \to 0$ のとき,その $N(\varepsilon)$ が ε^{-d} に比例して増加する場合には,d の値は A のハウスドルフ次元と呼ばれる。カントール集合においては,その次元は $\log_3 2$ である。

言うまでもなく、人物から借用した名前の使用はパラドックス感を与える。この場合における**次元**という用語はそれでも正しいということを、公平を期するために言っておく必要がある。「きちんとした」集合の場合、*d* の値は普通の次元と等しいからだ。

ある時期まで、フラクタルは真剣な注意を払うに値しない風変りな存在と思われていた。 ところが、運命、コンピューター、そしてマンデルブロからの圧力の下で、大転換が達成 された。現在、この領域における研究発表の件数はメーターの針が振り切れるほどだ。そ の主要成果は、フラクタルが広く分布していることが理解されたことである。

2. 自己相似性と宇宙

プロクロスはある事柄に関する謎を解こうとして、「すべてのものはすべてのものそれぞれの内に存在する」と言った。今にいたるまで、すべてはこのレベルに留まっている。もちろん、自己の諸部分における自己の全体の自己反復、あるいは自分自身のコピーの多数回の内包という現象は、新たな諸事実によって内容がより豊かになった。例えば、レーザー光線を照射されると、ホログラムのそれぞれの断片は写真撮影された対象物の全体をまるごと再現する。自分自身の内部に去っていくとは、何たる無限大だ……。半世紀前に起きた「脳天へのホログラフィーショック」はきわめて強烈だった。今ではさらに、無限回の自己埋め込みをモデル化する、あらゆる嗜好に合ったアトラクターとフラクタルが存在する(カントールの塵、シェルピンスキのカーペット、コッホ雪片、メンガーのスポンジ)。

デヴィッド・ボームはこの着想をそっくりまるごと宇宙へ外挿した。いわく,世界とは 大きなホログラムであり、そのそれぞれの小部分は全体に関する情報を含んでいるのだ,



ボーム, 1917~1992

と(いわゆるホロノミック・パラダイム)。この着想は、量子力学上の不快事象の領域に属する、今では古臭くなった EPR パラドックス ²⁾を克服するための手段として生まれた。このパラドックスの要点は、シュレーディンガー方程式によれば、素粒子はある状況では、瞬時に信号を交換し合うかのようにして互いに挙動を呼応させなければならないが、これは超光速度に対する禁止に反している、ということだ。

ボームはコロンブスの卵の手品を再演してみせた。パラドックスはない、なぜなら、相異なる粒子というものは存在しない

からだ、と。いわく、粒子は個別の対象物ではなく、何か単一のものの相異なる顔なのだ。 それゆえ、1つの物体の相異なる鏡における反射の間に信号の交換が存在しないのと同様、 粒子の間にはそもそもいかなる信号の交換も存在しない。

表現不可能なものを何とかして伝えるため、ボームはアナロジーを「描き出した」。1匹の魚が入っている水槽が互いに垂直な2枚のスクリーンに投影されている。それらのスクリーンしか見えない観測者は、2匹の魚がいると確信する。そしてそれらの挙動が呼応していることに気づき、瞬時の信号交換は存在すると結論する。

実のところ、これがホロノミック・パラダイムのすべてなのだ。そこでは水槽を使ったトリックが決定的な役割を演じている。今にいたるまで細々と燃え続けているこの着想の人気全体は、このトリックのおかげとみなすことができる。最も興味深いのは、ボーム自身はきっと正しかったのだろうが、しかしその着想は窓も扉もない壁に突き当たっているということだ。この状況は、ある点で量子力学が誕生したときの雰囲気を思い起こさせる。そこでは、何かが振動していなければならなかった。「何だか分からない何か」が振動しているものとすると決定したことによって死点から離れ、そのときやっと数学的ツールを思いつくことができた。ホロノミック・パラダイムにおいては、今のところすべてが水槽の上でストップしている。

ホロノミック・パラダイムはもう一つ別の独立した源を持っている。神経生理学者のプリブラムは記憶に関わる脳内部位の特定に関する不首尾に終わった試みを分析し、脳はホログラフィックな構造を持っているという結論に達した。これも将来有望なように見えるが、今のところ雑談のレベルに留まっている。

3. 決定づけられたカオス

動的システムを研究するとき大きな関心を引くのは、アトラクター自体の範囲内における運動である。連続的な時間の場合には、**平面上における**可能性の多様性はそれほど大き

²⁾ アインシュタイン-ポドルスキー-ローゼンのパラドックス (1935年)。

くない。理由は単純だ。(13.2)の解の単一性という要求は、軌道が自己交叉することを許さず、そのとき、バリエーションは指で数えられるほどしかない。 $n \ge 3$ の場合には、軌道の自己交叉に対する禁止はもはや大きな役割を演じず、一見したところかなり単純な系において複雑なアトラクターが生じる。

歴史上最初の**ローレンツアトラクター**(ストレンジアトラクター)(1963 年)は、次の系におけるものである。

$$\dot{x} = -10x + 10y$$

$$\dot{y} = 28x - y - xz$$

$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy$$

ローレンツアトラクターの図は、多分、既にモナ・リザの複製画よりも多く印刷されているのではなかろうか。見たところ、その図には何も特別なところはない。それは何か、糸をらせん状に巻いたもののように見える。次元は分数である。軌道の運動はカオス的で、初期データの与え方に対する感受性がきわめて高い。これらの性質はストレンジアトラクターの特徴的な属性とみなされている。

確率論が許容する頻度以上にしょっちゅう予報を外す気象予報士は、ローレンツの記念碑を 建てなければならない。それは何のことかと言うと、ローレンツは気象学者であり、彼が研究 した系は大気中の対流に対して直接的な関係を持っているということだ。自分が研究している 軌道が超感受性を持っていることを確信した彼は、「予測可能性:ブラジルの 1 匹の蝶の羽ば たきはテキサスで竜巻を引き起こすか?」という論文を書いた。これは明らかに、気象学者に 対して沢山のことを要求してはならないということをほのめかしている。

ローレンツはしばしば低次元の条件下における決定論的カオスを発見した功績で称賛されているが、それはいささか彼の意図を取り違えている。1次元系

$$x_{k+1} = \{Cx_k\} \tag{13.4}$$

(ここで波括弧は数の小数部分を表している)の軌道は、Cが大きいとき、初期データの与え方に対する異常な感受性を持ったカオス的挙動のきわめて良い例を与える。連続的時間に関して言えば、ローレンツ以前には、カオスの研究は確かに実際、主としてもっと高い次元のビリヤード系に関して行なわれていた³の。しかしそれでもやはり、ローレンツの発見の真の意義は別のところにある。その意義は、ごくありふれた実際の計算作業の中で生じた、頭の中で考え出されたものではない複雑な挙動を持つ動的システムの、きわめて単純な例が発見されたことにある。決定づけられたカオスとは、風変りな存在ではなく、計算手段がなかっために我々が以前は気づくことのできなかった、平凡な存在なのだ。

 $^{^{3)}}$ 重力の影響により、地球から 1 光年の距離にある宇宙中の物質 1 g の 1 cm の移動は、大気中の分子の 1 秒後における運動方向を絶対的に不確定にする!(ボレル)

あえて言えば、この状況はある点で、ほぼすべての関数は微分不可能であることは疑いもなく明らかであるにもかかわらず、いたるところ微分不可能な関数の例がワイエルシュトラスによって示されたことを思い起こさせる。とは言え、それでもやはり……。あれこれの可能性はどうすれば実現することが可能なのか、また可能なのか否かを理解することがきわめて重要である 4。決定づけられたカオスは、きわめて複雑な仕方で記述される、そのために特別に構築された非現実的なシステムにおいてしか生じ得ないのかもしれない。もしそうだとすると、我々はまったく別の宇宙を相手にしていることになるのかもしれない。

4. 1次元の場合の豊かさ

奇妙なアトラクターの効率的な解明は、現代的な計算機器がなければおそらく不可能だったことに注目する必要がある。そもそも、数学におけるコンピューターの役割はきわめて大きい。にもかかわらず、大部分の場合、このことはヴェールに覆い隠されている。数値実験の例は、伝統的に補助的手段の部類に分類されていた。現在、それらは研究の成功を決定づける、最大の重要性を持った事項のカテゴリーに次第に移行しつつある。

単純この上ない反復手続きのかなり鮮やかな例を挙げてみよう。

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda) \tag{13.5}$$

この手続きにおいて, コンピューターは驚くべき現象を発見することを可能にした。話を 明確にするため, 例えば

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k) \tag{13.6}$$

としてみる。

 λ をゼロから徐々に大きくしていくと,このシステムにおいて無数の分岐が生じる。手続き(13.6)はまず最初に各種の平衡のうちの一つに帰着し,次に倍加サイクル 5 ,C(2), $C(2^{2})$,…が現れ始める。その後,ある λ_{∞} のときカオスが訪れ,次に再び倍加サイクルが始まる,等々となる。

(13.6) というきわめて単純なモデルにおいて幅広いスペクトルの様々な可能性が実現するということは、それだけで驚くべきことだ。しかし、それとは別のもっと驚くべきことがある。システム (13.6) の分岐の描像において、(13.5) の形を持った様々な系の挙動の一般的法則性が検出されるのだ。その法則性は、関数 $f(x,\lambda)$ が具体的にどのようなものであるかに依存せず、広い範囲において検出される。特に、パラメーター λ の分岐値の数列 λ,λ,\dots において、またサイクルC(p) 自体の数値的表現においてさえも、普遍定数の存

⁴⁾ 例えば、非可算な数は可算な数よりも比較にならないほど多いにもかかわらず、誰かによって1個の非可算数が「建設的に提示」されることを危惧しなくてもよい。

^{5) (13.6)} および条件 $x_1 = x_n$ を満たす軌道 x_1, \dots, x_n を、長さ p のサイクル C(p) と呼ぶ。

在が明らかになる。これはミッチェル・ファイゲンバウムによる研究以前には、誰も予想 していなかったことだ。

さらにもう一つの驚くべき法則性——それは、シャルコフスキーサイクルの階層性である。(13.5)において、サイクルC(m)の存在からC(n)の存在が導かれる。それを $m \succ n$ と書く。シャルコフスキーは次の一般的法則性を立証した。

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \dots$$
$$\dots \succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \dots$$
$$\dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$$

このように、C(3)がいわば最年長のサイクルとなっている。このサイクルの存在から、それ以外の任意のサイクルの存在が導き出される%

非線形性の多様性はある程度までデコレーションであることが、またも判明した。

この水車小屋には、非線形動力学に関する多数の研究が水を注いでいる。例えば**ソリトン**……。初めのうちは、3 次成分を考慮すれば、それにより、その解が奇跡的な性質を持っているコルトヴェーグ-ドフリース方程式が導き出されるように思われた。しかしその後、それ以外の多数の方程式もソリトン解を与えることが明らかになった。そして、非線形世界におけるソリトンは例外なのではなく、むしろ信号伝播の標準なのだということが理解されつつある。

非線形性の無限の多様性という印象は、おそらく、関数というものをテイラー級数のカテゴリーの中で考える習慣から発しており、このことが汲み尽くし得ぬ可能性という幻想を生み出しているのだろう。実に多くの課題において、それは事の本質に触れていない。そこで重要なのは別のことだ。関数は凸か凹か、極値点を持っているか否か、線形関数と比べてどれだけ急速に増加するか。この場合、「テイラー製」の品目は装飾品に転化しており、さほど多くないバリエーションしか残っていない。それゆえ、「非線形の前人未到の地」は広大ではあるが、多くの人々が思っているほどには広大ではない。

⁶ これらすべての結果は文献上で多岐にわたって詳細に紹介されている。

第14章 計算可能性と証明可能性

端っこにおいては、他ならぬ何を予想するべきか? 可能が不可能に、生が死に、定理がパラドックスに 移行する境界においては。本質的には、予想するべ きことは何もない。しかし、人生の意味の探究にお けるのと同様、そこでは副次的効果が主役を演じて いる。

XYZ

数学は、観察される諸事実を組合せ、少々空想をめぐらすことによって横に向かって発展する。その後突然、矛盾が発見され、そのとき、一般的な問いを自らに与えた上で、深部に向かって掘り進める必要性が生じる。すべての数学的真理を証明することは可能なのだろうか? いかなる課題の場合にもそれを解決するためのアルゴリズムが存在するという確信には、それ相当の理由があるのだろうか?

1. 計算可能性

次の関数について検討してみよう。

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (10進法で表された π の中に、連続した 7がちょうど n 個あるとき) $0 & (そうでないとき) \end{cases}$$$

f(n) の値をどうやって決定するか? 10 進法展開で表された π の数字の遂次計算の手続きが求められている。あるステップにおいて隣り合う n 個の 7 が現われれば,そのプロセスは停止して f(n)=1 となる。しかし,もし何らかの n のときに f(n)=0 となったとすると,その手続きは非実効的であり,けっして停止しない。

自明のことだが、ある具体的な計算スキームが無効であるということは、何事も証明しない。別の実効的な手続きが存在する可能性があるからだ。

次の状況でも同じことが繰り返されるように見える。

$$g(n) = \begin{cases} 1 & (それを2乗した数が、連続した7をちょうどn個 \\ 含んでいるような整数 k が存在するとき) \\ 0 & (そうでないとき) \end{cases}$$

しかし、 $q(n) \equiv 1$ なので、関数q(n)は計算可能である。

この事実の証明は次の有名なクロネッカーの定理から容易に導き出される。

任意の無理数 a と任意の x,y (x < y) に関して,

x < ma - n < y

であるような整数 mと nを常に指定することができる。

次に、その10進法による表記が事前に与えられた任意の数字列から始まる整数の2乗が、常に存在することを示そう。 所与の数字列が 10 進法で数 A を表しているとする。 我々が示す必要があるのは、

$$A \cdot 10^p < k^2 < (A+1) \cdot 10^p$$

であるような整数kとpが見出されるということだ。この不等式は、対数変換すると

$$\lg A < 2\lg k - p < \lg(A+1)$$

になる。 $k=2^m$, p=2q と置くと, 次式が得られる。

$$\lg A < 2m\lg 2 - 2q < \lg(A+1)$$

この先、残るはクロネッカーの定理を引用することだけだ。

このことを背景として、f(n) に関しても、状況はともかくも解決されるのではないかという印象が生じるかもしれない。しかし、それは単なる感情にすぎない。



チューリング, 1912~1954

計算不可能な関数が存在することの形式的証明はかなり単純だ。出発点となるのは計算プログラムの番号付けだ。これは容易に行える。まず最初に、1つのコマンドからなるプログラム、次に2つのコマンドからなるプログラム、さらに3つのコマンドからなるプログラム、等々というように、すべてのプログラムを数え上げることができる。その結果、それぞれのプログラムは自分の番号kを得る。プログラムを P_k で、それに該当する関数を $Q_k(n)$ で表す。

さて, 次の関数を検討しよう。

$$h(n) = \begin{cases} \varphi_n(n) + 1 & (\varphi_n(n))$$
が定義されているとき)
$$(\varphi_n(n))$$
が定義されていないとき)
$$(14.1)$$

この関数は計算不可能である。それを証明するため、逆のこと、すなわち、あるpのとき $h(n)=\varphi_p(n)$ と仮定しよう。しかし、それはあり得ない。なぜなら、 $\varphi_p(p)$ が定義されているときには $h(p)\neq\varphi_p(p)$ であり、 $\varphi_p(p)$ が定義されていないときにはh(p)は定義されているからだ。

2. 誤謬

この領域にはパラドックスが沢山ある。しかし、そこでのパラドックスの大部分は誤った推論から生まれたものである。にもかかわらず、それらの誤謬を「追体験」することは、「どこへ進んではならないか」を知るためには有益だ。そのような例の一つを紹介しよう。

それに従えば有限回のステップで関数 f(n) が計算されるような指令が任意の n に関して存在する関数 f(n) を、計算可能関数と呼ぶことにしよう。そしてそのような関数に番号を付け、

$$g(n) = f_n(n) + 1$$

と定義しよう。この関数は計算不可能である。なぜなら、この関数はn=1のときには f_1 と異なり、n=2のときには f_2 と異なり、等々となるからである。一方、 $f_n(n)$ の計算値には常に1を加えることができるのだから、この関数は計算可能である。

関数(14.1)をめぐってわざわざ難しい議論をしたのはなんのためだったのか,という疑問が生じる。その理由はきわめて重大である。計算可能関数を,それが任意のn のときに計算可能となるように定義しようとするあらゆる試みは,原理的に失敗する運命にあるのだ。つまり,あまりにも狭いクラスの関数が得られるか(このことは計算可能性という概念に対する信用を失わせる),または何らかの関数f(n) は必ず不確定領域を持つことになるかのいずれかなのである。f(n) の定義を力づくの方法で拡張しようとする試みもうまくいかない(停止問題を解決できない)。

この不快な状況の根っこはかなり明白だ。疑いもなく実行可能な直接的作用(足したり掛けたりするタイプの作用)を用いた関数の定義は、最終的に方程式

$$u(a, n) = 0 \tag{14.2}$$

をもたらす。この方程式の解n=f(a)は計算可能関数に分類するのが自然だ。そうでないなら, この理論はろくに役に立たないおもちゃになってしまう。それと同時に,(14.2)は原理的に常 に可解というわけではないのだ。

分かりやすい例をもう一つ。

ちゃんとした意味を持ったいくつかのテキストについて検討しよう。それぞれのテキストは 100 個以下の単語を含んでいて、ある数を定義している。当然、そのようなテキストの数は有限である。それゆえ、そのような方法で定義された数の集合は有限である。したがって、その集合には最大数が存在する。その数に1を加えよう。

前の段落は 100 個以下の単語 [ロシア語での単語数] を含んでいるが、しかし、最大数より 1 だけ大きい数を定義している!

ここでの詭弁は多重的である。語句によって定義される数の集合の有限性について語るときには、何かコード化のようなものが暗黙のうちに意味されている。しかし、それ自体で数を定義しているのではなく、他の語句に依拠して数を定義している語句は、どう取り扱えばいいのか?もはや厳密なコード化ではなく、発展していく語句の系が得られる……。

さらに。いつか誰かが紙に書きつけた宇宙に存在する原子の数,あるいは最大数……。そのような語句は何を定義しているのか? それは,何も定義していない。それと同時に,あり得るかもしれない,人類の知識の膨大な総体に対する依拠を定義している。その最も単純な例は

「1 インチ中のミクロンの数」だ。4 つの単語が数を完全に定義しているが、語句自体には含まれていない情報を持たない限り、その数を知ることはできない。

要するに、パラドックスから生じたたわ言を除去した後には、何も残らないということだ。

3. 帰納的なモチーフ

任意の元がある集合に属するか否かを解明するための実効的な手続きが存在する場合, その集合は**帰納的集合**と呼ばれる。

ある集合の元を遂次的に生成するための実効的な手続きが存在し、その手続きが極限に おいて集合全体を覆い尽くしている場合、その集合は**帰納的枚挙可能集合**と呼ばれる。 次の基本的結果が生じる。

帰納的枚挙可能集合であるが、帰納的ではない正整数の集合が存在する。

これの証明スキームは単純だ。まず最初に、次の事実が正しいことを立証する。すなわち、正整数の集合 S は、S だけでなく、 \overline{S} も帰納的枚挙可能集合であるときに、かつそのときにのみ帰納的である。ここで \overline{S} は S の補集合、すなわち S に属さない正整数の集合を意味する。

その証明はそれほど難しくない練習問題になる。それから先の推論過程は次のようになる。 S_1, S_2, S_3, \dots をすべての集合の実効的な数え上げとする。 S_x に属する数 x から集合 R を形成しよう。こうして, \overline{R} は条件 $x \notin S_x$ を満たす元 x によって構成されることになる。

それゆえ, \overline{R} は S_p のどの 1 つとも一致することができない(これはその逆から証明され

る。2 行で書けるが単純ではない)。したがって \overline{R} は帰納的枚挙不可能集合であり,R は非帰納的集合である。

計算不可能関数の存在と、帰納的枚挙可能集合であるが非帰納的な集合の存在とは、その原理において、2つの相異なる鏡における同一現象の反映である。そして、さらにそれ以外の多数の鏡が存在する。それらの鏡のうちの一部は少し離れて立っており、そこにおける同一現象の鏡像には夾雑的なディテール(例えばゲーデルの定理の)が付け加わっている。

計算可能関数を定義しようとする多数の試みが知られている。1936年,チューリングが有限な機械で計算可能な関数を導入した。その機械は現在,チューリングマシンとして知られている。それと同じ年,ゲーデル,エルブラン,クリーネが帰納的関数を導入した。その後,チャーチ,ポスト,マルコフがそれ以外のクラスの関数を導入した。

数多くの数学者たちの努力により、俗に言うようにすべての道はローマに通じること、 つまり、すべての道は同一のクラスの計算可能関数に通じることが立証された。

4. ディオファントス集合



ゲーデル、1906~1978

方程式

$$p(z_1, \dots, z_n) = 0 \tag{14.3}$$

(ここでp は整数を係数とする多項式)はディオファントス方程式と呼ばれ、整数解が求められる。

このような方程式は、まるでルーレットがプレイヤーたちを惹きつけるように、古くから数学者たちを惹きつけてきた。様々な解決方法は断片性^[款注]の点で異なっている。1900年、ヒルベルトがその有名な数学問題のリストの10番目において、「任意の方程式(14.3)の可解性を解明するための単一のアルゴリズムは存

在するか?」という問題を設定した。この問題は困難ではあるが、豊かな果実をもたらすことが判明した。1970年、この問題を否定的に解決し、これに終止符を打ったのはマチャセヴィッチだった。「観客」たちは大きな満足感を得ることができた。数学者たち(ゲーデル、デイヴィス、ロビンソン、マチャセヴィッチら)がエレガンスとインスピレーションをもって仕事をしてくれたからだ。それに加えて、異常なほどに美しいその解決方法は文字どおり、学校の生徒(もちろん、忍耐力のある)にも理解できることが判明した。その解決に伴って得られた沢山の結果は直観にとって意外なものだった。そして、このテーマ自体は純粋な形での計算可能性のテーマに転化した。その果実について詳しく検討しよう。

(14.3) の変数の一部をパラメーターとして分離し、その方程式をp(a,x)=0、すなわち

$$p(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_m) = 0$$
 (14.4)

の形に書き換える。

方程式(14.4)が任意の $a \in A$ の場合に、かつ $a \in A$ の場合に限り、正の整数 x_1, \dots, x_m に おいて可解であるならば、そのベクトル $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ の集合 $A^{1)}$ をディオファントス集合 と名づける。

一見したところ,この定義はかなり厳しい制約を課しており,したがって多少なりともトリビアルでない集合がディオファントス集合になることはあり得ないように見える。例えば, π_n の表式が数 π の展開における最初のn 桁と一致しているような,整数 π_n の集合。ちなみに,もしマチャセヴィッチが自分の結果を公表する前に「素数の集合はディオファントス集合か?」という問いで賭けをすることを提案していたら,彼は億万長者になれたかもしれない。あらゆる数学者が「ノー」と答えるはずだ。

[「]断片性 (fragmentariness)」は「研究対象の細分化・限定化の仕方や度合い」のことかと思われる。 り以下,ほとんどいたるところにおいて k=1, すなわち A は単なる整数の集合とみなすことができる。

何と,**任意の帰納的枚挙可能集合はディオファントス集合である**ことが判明したのだ! これは,この問題に懸命に取り組んでいた者たちにショックを与えた。しかも,わずかな 再定式化がショックの効果をさらに強めた。その再定式化はきわめて単純な,しかしやは り意外な結果に基づいて行われた。

正整数の集合 A は、それがある多項式

$$P(x_1,\dots,x_k)$$

の正値の集合である場合には、かつそうである場合に限り、ディオファントス集合である。

その証明は初歩的だ。もしA が $P(x_1,\dots,x_k)$ の正値の集合であるならば、

$$p(a, x_1, \dots, x_k) = a - P(x_1, \dots, x_k) = 0$$

がAをディオファントス集合として決定する。

逆。A が

$$Q(a, x_1, \dots, x_l) = 0$$

が可解となるようなaの集合であるとする。そのとき,A は多項式 $x(1-Q^2(a,x_1,\cdots,x_l))$ の正値の集合である。

このように、その正値の集合が素数の集合と正確に一致するような多項式が存在する。 それだけでなく、その多項式を具体的に指定することが可能である。ただし、全体的な見 通しが悪いため、そのことが与えるものは少ない。

(14.4) の各多項式は変数 x の次数 n と数 m によって特徴づけられる。任意のディオファントス集合に関して、 $n \le 4$ (しかし、m より大きくてもよい) または $m \le 9$ (しかし、n より大きくてもよい) の (14.4) の多項式を指定することができる。最も複雑な場合でも、通常、n と m の数は $20 \sim 30$ 程度で十分である。任意のディオファントス集合をその番号に従って生成する万能多項式(万能チューリングマシンのアナロジー)の表式の場合にも、その程度 n と m で十分である。

開けつつある風景を背景として見たとき、ヒルベルトの第 10 問題は何かしら後景に退く。 この問題の否定的な解決は、帰納的計算可能ではあるが帰納的ではない集合の存在という 事実の他の言語への単純な翻訳を与える。

計算可能関数

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

について言えば、これは、そのグラフ(集合)

$$G = \{x_1, \dots, x_n, y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

がディオファントス型となる関数である。

こうして、ディオファントス方程式は計算可能性の研究のさらにもう一つのバリエーション (言語) であることが判明する。そのバリエーションはある意味においては同値であり、ある意味においてはより実効性が低い。今検

討している領域における研究の大部分は、伝統的にチューリングマシン、あるいは帰納的 関数に依拠している。そのようなあれこれの研究の場合、計算プロセスはまるでベールに 覆われているかのようだ(規則が記述されているにもかかわらず、コントロールの下から こっそり逃げ出す)。マチャセヴィッチの研究の場合、そこで計算されるのは「手で触れる」 ことのできる普通の多項式の値である。いくつかの課題にとって、このことは本質的な重 要性を持っている可能性がある。

5. ゲーデルの定理

前節における「ディオファントス物語」との関係で、ゲーデルのテーマが著しく明瞭に 見えるようになった。かつて、ゲーデルは算術と論理の言語を数字の言語に翻訳するため に大いに骨を折らねばならなかった。彼の最終結果はよく知られている。その隠語的バリ エーションは次のように響く。「公理の総体がいかなるものであろうと、数論には証明不 可能な主張が存在する」。

もちろん,これはあまりにも恣意的で、しかも厳密に言えば不正確な解釈だ。もっとも、その解釈は真理に近いのだが。正確な定式化の様々なバリエーションの一つは、「すべての無矛盾な算術的論理は不完全である」というものだ。これは、定理が「ターンキー方式」で引き渡される場合に受け取り手をかんかんに怒らせることになる、例のディテールをほのめかしている。ここで主要な核心をなしているのは、枚挙可能ではあるが帰納的ではない集合の存在という事実である。これは重要性を基準にして評価した場合の話だ。頭痛に対する寄与を基準にして評価すれば、その99%はディテールが与える。まさにそのディテールを克服したことが、ゲーデルの業績をヘラクレスの武勲と同列に置いているのだ。

ディオファントス方程式の言語においては、状況ははるかに透明になる。そこでは、

- ・ 任意の算術演算
- ・ 様々な数字関数およびそれらによって構成されたもの
- ・ 論理記号∧ (…かつ…), ∨ (…または…), 限量記号∃ (…が存在する)

に依拠している主張, またディオファントス方程式の言語によって表現され得るさらにい くらかのものが, まさに逐次的に一歩一歩立証される。

論理演算

 \neg (…でない), \forall (すべての…に対して), \rightarrow (…ならば…)

は、許される立証手段として認められていない。それは当然だ。なぜなら、それらのうち の任意の演算を使えば、枚挙可能集合の帰納性に関する主張を書くことが可能だからであ る。既に立証されているように、それは必ずしも正しくない。

それゆえ,多項式の言語においては,ゲーデルの定理の同値物を多かれ少なかれ正確に, 次のように定式化することができる。 無矛盾な公理系がいかなるものであろうと、非可解な多項式が存在する²⁾。しかし、この事実は証明不可能である。

2つの注記

1. 話がヒルベルトの第 10 問題の否定的な解決に及ぶと、単一のアルゴリズムは存在せず、任意の具体的な多項式のための独自のアルゴリズムが存在する可能性がある、などといったことがしばしば語られている。それは違う。少なくとも、マチャセヴィッチとその仲間はそれより大きなことを立証した。それは、そのための可解性の検証アルゴリズムが存在しない具体的な多項式は存在しない、ということだ。他ならぬこのことから、とりわけ、共通のアルゴリズムは存在しないという結論が導き出される。

2. ゲーデルの結論における公理の無矛盾性への言及は、困難を生じさせないはずである。なぜなら、その言及は、おとぎ話の前置きほどの重要性も持たない条件だからである。矛盾している場合には、どんな結論でも下すことが可能になる。それだけでなく、公理の無矛盾性それ自体は検証不可能なのである(選択された枠組みの内部では)。実際のところ、公理系の形成はどのようにして生じるのか? 議論の出発点をなす総体がいかなるものであったとしても、

$$\forall x > 0 : P(x) \neq 0 \tag{14.5}$$

という証明不可能な真理の存在を確かめることができる。しかし、(素数やその他沢山のものを生成する多項式の場合とは異なり) P(x) を具体的に指定することは原理的にできない。さもなければ、(14.5) の証明不可能性との矛盾が生じてしまう。それゆえ、我々は (14.5) のタイプの主張の真理性に対しては疑念しか持つことができない。それらの主張を公理に付加すれば、我々は「疑わしい」公理系を得ることになる。その公理系の内部にいるとき、我々は真理性についても矛盾性についても何も言うことができない。自明のことだが、もし公理が実際に真理であり、無矛盾であったとしても、そのことを知っているのは神だけだ。そうでないのだとしたら、あとは「ひらめく」のを待つしかない。

6. 恒等式の基底定理

前節で述べたことから、計算可能性と証明可能性はきわめて密接に関係し合っていることが分かる。ただし、証明可能性は、計算可能性よりも大きな直観上の意義を持っていることは言うまでもなく、解釈上の独自の魅力を持っている。いずれにせよ、「背後に隠れているもの」を見つけることを可能にする単純化されたモデルは大きな価値を持っている。

²⁾ 方程式 (14.4) が非可解であるという意味で。

帰納法の公理がなければ、ある主張が任意の整数に関して正しいことを証明することはできないと語られることがある。それは必ずしもそうだというわけではない。例えば算術の枠内においては、次の公理 A₀の総体だけですませることができる。

- ・ 加法と乗法の交換法則
- ・ 0を足すことおよび1を掛けることに関する規則
- ・ 和と積の場合における括弧の配置の恣意性
- · 分配法則 a(b+c) = ab+ac

今,加法,乗法および括弧の配置のみを用いて表すことのできる恒等式を(定理として)検討するとすれば、閉じた理論が得られることになる。そこでは、(用いられる手段に対する人為的制約により)すべての真理が証明可能である。この場合、 A_0 を恒等式の有限基底定理と呼ぶ。

それほど遠くない昔 (40 年前), A_0 を若干拡張したらどうなるかという問題がタルスキの頭に与えられた。例えば,

$$1^{a} = 1, a^{1} = a,$$

$$c^{a+b} = c^{a}c^{b},$$

$$(ab)^{c} = a^{c}b^{c}, (a^{b})^{c} = a^{bc}$$
(14.6)

という普通の性質を公準として定めた上で、それにべき算を付け加えたらどうなるか? もちろんそのときには、恒等式を書くときにべき算を許さなければならない。その場合、すべての正しい恒等式は証明可能となるのだろうか(タルスキの HSI 問題 [Tarski's high school identities problem。 Tarski's high school algebra problem とも言う])?

これはきわめて難しい課題であることが次第に明らかになった。そしてこの課題はそれから20年後にやっと解決された。ウィルキーが、正しい恒等式

$$\left[(1+a)^{a} + (1+a+a^{2})^{a} \right]^{b} \left[(1+a^{3})^{b} + (1+a^{2}+a^{4})^{b} \right]^{a} =
= \left[(1+a)^{b} + (1+a+a^{2})^{b} \right]^{a} \left[(1+a^{3})^{a} + (1+a^{2}+a^{4})^{a} \right]^{b}$$
(14.7)

を公理 A₀ + (14.6) を用いて証明することが不可能であることを発見したのだ。

このような条件においては自然なことだが、それでも何とかして有限基底定理を得るため、 A_0 + (14.6) に (14.7) を加えたいという誘惑が生じる。しかし、もう何も得られない。用いられる手段の多様性に対する障壁が克服され、定理の数が証明の数よりも速く増え始めるからだ。

さらにもう一つ鋭い疑問がある。どうすれば(14.7)の証明不可能性を証明することができるのか?確かに、まだ得られていないという事実を断定することは可能だ。しかし、これからも得られないということを、どうすれば保証することが可能なのか?可能であることが判明しつつある。この目的のために、普通の数の集合とは異なったモデルが作り出

103 第14章 計算可能性と証明可能性

されつつある。このモデルにおいては, A_0 + (14.6) は満たされるが,恒等式 (14.7) は 誤りとなる $^{3)}$ 。

 $^{^{3)}}$ これに関する詳細と追加的情報は M.V.ヴォルコフ [M.V. Volkov] の興味深い論文「恒等式の基底定理の有限性の問題」(MIF, 1997, No.2) にある。

第15章 空間と時間

私をだませ…… ただし完全に、永遠に……

何のためにと考えないようにするために、

いつのことだったかを記憶しないようにするために……

何も思うことなく嘘を自由に信じ,

誰かの後ろについて闇の中をあてどなくさまようようにするために……

知らずにいるようにするために,

やって来て目隠しをしたのが誰なのか、

見知らぬ部屋から部屋へ迷路のように連れ回しているのが誰なのか、

頬にときおりかかる熱い息が誰のものなのか,

私の腕をその腕の中でこんなにもきつく挟みつけているのは誰なのかを……

目が覚めたとき、夜と霧しか見出さないようにするために……

だませ、そして自ら嘘を信じよ。

マクシミリアン・ヴォロシン [ロシア・ソ連の詩人]

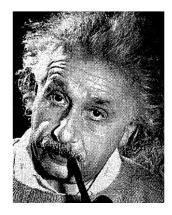
この世界がどんなふうに出来ているのかは、多分、誰も知らない。しかしある人々は知っているふりをしている……。このことが状況をひどく錯綜させているのだが、その代わり、科学者の大群に仕事を与えている。

1. 宇宙の謎

宇宙の最大の謎, それは無限大という秘密である。それは言わば,「地平線の向こうには何があるのか?」といった謎だ。程度の差こそあれ, 誰もがその種の疑問にひどく頭を痛めるが, 頭痛が全快した者は一人もいない。それゆえ, 大多数の人々はアインシュタインにすがることを選ぶ。彼らは言う, 彼の相対性理論はすべてを説明している, より快い気分になれるのだと。アルコールは錯誤の度合いをさらに強め, そうなると未知なるものが頭を悩ませなくなる。しかし, 相対性理論は謎をある場所から別の場所に移し替えているだけで, 何も説明してはいない。

マイケルソン-モーリーの実験の件に関する驚きを背景として 1905 年に誕生した,特殊相対性理論を取り上げてみよう。

照準が狂わないようにするため、そもそも物理学には触れたくないのだが、叙述から物理学を完全に除去するのは不可能だ。それゆえ、この先の叙述における「物理学への話の逸脱」には、物理学に関する評価付けをする意図はない。



アインシュタイン, 1879~1955

さて、是非はともあれ、当時の物理学者たちはマイケルソン -モーリーの実験にもとづいて、光はすべての慣性系において同 一の速度

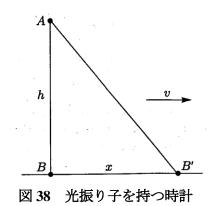
$$c = 2.998 \cdot 10^{10} \,\mathrm{cm/s}$$

で伝播するという結論に達した。もちろん,これは常識の観点から見て馬鹿げた話だ。速度Vで走行している戦車が砲弾を速度vで発射すれば,砲弾は速度v+Vで飛ぶ。ところが,それと同じ戦車の前照灯によって速度cで放出される光は,どうしたわけかc+Vではなく,それと同じ速度cで伝播するというのである。

もちろん我々が知りたいのは、科学界がこの「愚論」に同意した原因である。当時は、地球は宇宙を満たしている静止エーテルの中を運動しているという世界像が支配していた。光はエーテルの振動であり、それゆえ、速度合成則が働いているとすれば、光の伝播速度は、地球の回転方向とそれを横切る方向(緯度方向と経度方向)とでは異なっていなければならないはずだ。ところがマイケルソンの実験(1881年)、そして彼とモーリーの共同実験(1887年)はその予想を裏づけなかった。当然、エーテルは地球の運動によって引きずられているという仮定が生まれた。しかし、それには独自の欠点があった。様々なバリエーションが分析され、消滅していった。最終的にただ一つ残ったのは光速度不変性だった。

この親にしてこの子ありである以上、そこから得られた帰結はそれに相応したものだった。別の慣性系に移行すると、物体の大きさと時間の流れは変化するという帰結が、それまで定着していた理解を破壊した。後年、マイケルソンはこう言って嘆いた。「もし私が私の実験から彼らが導き出したすべてのことを予見できたなら、私はあの実験をけっしてやらなかっただろう」。

2. アインシュタインとローレンツ



単純な例を検討しよう。A から出た光が B に達するのにかかる時間は

$$\Delta t = \frac{h}{c}$$

である(図38参照)。

AB に対して垂直方向に速度vで走る台車の上にA とB を配置した場合には,静止している観測者はそれとは別の描像を見ることになる。光はAB' に沿って伝播し,光

がB'に達するのにかかる時間は

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{c}$$

となる。 $h=c\Delta t$, $x=v\Delta t'$ を考慮すると,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{(1 - \beta^2)} \tag{15.1}$$

(ここで $\beta=v/c$)となる。次に、A とB にそれぞれ鏡を配置し、光の光子を「あっちへ、こっちへ」と走らせると、光振り子を持つ時計が得られる。(15.1)により、その時計は $\frac{1}{(1-\beta^2)}$ 倍ゆっくり進むことになる。

(!) ここで言われているのは、複数の運動座標系における各時間の流れの相互関係ではなく、静止している観測者の視点から見た場合には、運動している時計はよりゆっくり進むということであることに注意を払おう。あるいは逆に、運動している観測者から見た場合における静止している時計、としても同じことだ。言い換えると、公式(15.1)は、それに対して運動が生じている側の基準系[=参照系]の時間を通じて、対象物のいわゆる固有時間を表しているのである。

これとほぼ同じ流儀で考えを進めると、ローレンツ変換1)

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z',$$

$$t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
(15.2)

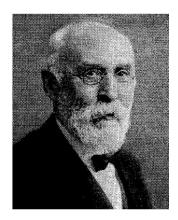
を得ることができる。ローレンツ変換は、慣性系Kにおける点の座標 $\{x,y,z,t\}$ を、Kに対してx軸に沿って速度vで運動している系K'におけるその同じ点の座標と関係づけている。 (15.2) から、例えば

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta x$$

が導き出される。これは、物体の大きさが運動方向に沿って係数 $\sqrt{1-\beta^2}$ に従って収縮することを意味している。手短に言えば、精神病院。

19 世紀から 20 世紀への変わり目頃には、以上において検討した領域の諸現象が物理学者たちの注意の中心にあった。彼らの背景にある数学は安っぽく、推論はパズル解きのようなものだった。しかも何より悪いことに、パラドックスの影が絶えずちらついていた。

¹⁾ この変換を最初に検討したのはフィッツジェラルドである。



ローレンツ、1853~1928

例えば、光振り子を持つ時計において、光子が鏡Bに 100 回ぶっかると、それが観測者には 60 回に見えるとしよう。また逆に、うまい具合に、観測者の心臓が 10 回鼓動すると、その時計にはその音が 6 回「聞こえる」としよう。最終的なパラドックスが生まれるためには、ある小さなことがまだ不足している。それは若干の時間が経ってから時計と観測者を対面させることで、その対面を慣性的方法によってうまくお膳立てすることはできないということだ 2 。要するに、当時の物理学者たちの注意の中心にあったのは、常識に反する論理的構築物のある種の総体だったのである。

アインシュタインは何をやったのか? 彼は諸事実の不定形な堆積を整頓し,理論に再編成した。その土台には次の2つの公理が据えられていた。

- (i) 相対性原理: 自然法則は、あらゆる慣性基準系において一様である (ガリレイの力学的原理の一般化)。
- (ii) 宇宙における相互作用の最大速度は制限されており、あらゆる慣性系において一様であり、真空中における光速度に等しい。

実は、理論の基礎にはそれより若干多くのものが非明示的な形で置かれていた。それは 時計の同期化の手続き、そして自明に見えていたいくつかの論理的推論方法である。とこ ろが得られた描像は理論に似ていた。実際にはいかなる宇宙の謎も解かれていなかった。 突き刺さっている主要なトゲ、光速度不変性が依然として残っていたからだ。しかし、も つれ合った矛盾の塊は論理的に整合化された諸結果の総体に転化した。

比較対照してみると、そのとき、ニュートン力学の誕生と何か似たことが生じた。ニュートンは公理として3つの法則を提示し、さらに重力による引力の法則を付け加え(なお、彼はその際、この法則の発見者としての権利を自らのものとして主張しなかった)、この基礎の上に残りの力学全体を構築し得ることを示した。このような節度ある公理的アプローチはきわめて魅力的である。ユークリッド幾何学が既に 2000 年以上、全体的状況を背景として見たとき、首尾一貫性と論理性という点で明らかに際立っているのには、ちゃんとした理由があるのだ。

しかし、アインシュタインに戻ろう。相対性理論は途方もなく複雑な代物だという意見がある。実際には、その複雑さのレベルは普通の力学におけるのと大体同じだ。理論の基礎について論じている限り、その数学は学校でやる数学のレベルだ。特殊相対性理論における推論はそれより複雑だが、その複雑さは、そこで論じられている内容が異様で、常識と合致していないことに起因している。もうその先になると、好きなだけ複雑な課題を解

²⁾ 双子のパラドックスは、双子の2人が観測者と時計を交換するときに生じる。

決することが可能になるが、しかしそれは既に物理学というより、むしろ数学だ。ちなみに、アインシュタインはこう言ってため息をついた。「数学者たちが相対性理論に取り組み始めてからというもの、私自身はもうこの理論を理解できなくなった」。数学者たちはこの言明が気に入っている。数学者たちがもっと気に入っているのは(同人による)もう一つの言明だ。「物事の本質を理解することなく、物事を数学的に捉えるという驚くべき能力が存在する」。

特殊相対性理論の神話化においては、知識の欠如が大きな役割を演じている。例えば、 有名な公式

$$E = mc^2 \tag{15.3}$$

の向こう側に何があるのかを知っている者は少ない。そして各人, そこには自分が理解しているものが存在しているような気がしている。物理学者たちにとっては, 衝突する光子が物体に対して運動量

$$p = \frac{E}{c}$$

を伝えることが知られるようになって以来、公式(15.3)は自明なことだった。上式から(15.3)まではたった一歩だ。A と B の 2 つの物体を取り扱う、ある力学の課題を取り上げてみよう。例えば、物体 A の熱エネルギーの一部 ΔE が光の運動量に変換され、B に送られる。ロケット効果(反跳)により、光子が B に向かって飛んでいる間、系の重心は移動する。この状況を普通の力学と整合させるためには、光子を吸収した後の B の質量を

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

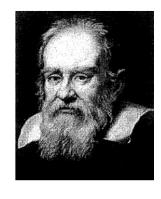
だけ増加させなければならず、これが最終的に(15.3)を与える。アインシュタインは実際にはそれとは若干異なったやり方で(15.3)を導出したが、それでもやはり、それはテキストの半頁にすぎない。

我々は単純さを強調し、若干極端に走った語り方をしているとは言え、もちろん我々が本書の読者として想定しているのは、比喩的な言い方をすれば、デビッド・カッパーフィールド [現在活躍中の世界を代表するマジシャン] のイリュージョンの秘密より、そのイリュージョンそのものにより大きな関心を持っている観客たちではない。仕事が舞台裏でなされているのか、それとも舞台上でなされているのかは別問題だ。そこでは他とは別の角度からの物の見方がなされており、したがって時間が経つにつれて舞台が空っぽになっていかないようにするためには、そこへの人々のアクセスが必要とされる。そして人々がアクセスしてくれるようにするためには、酔っ払いではなく、しらふの人間の冷静な判断がなされていなければならない。特殊相対性理論の領域では、その冷静な判断の不足が感じられることは言うまでもない。文明はアインシュタインという人間のうちに偶像を作り出し、タ

ブーを定めた。ある面から見れば、それはディレッタントたちからの攻撃に対する防御と して結構なことだが、別の面から見れば、ブレーキ……。

3. 一般相対性理論

一般相対性理論は特殊相対性理論とはまったく別の代物だ。ここではアインシュタイン が単独の著者であり、多くの人々が考えているように、この理論は時代のはるかに先を行 っている。この理由により、この理論は主に、「沿岸警備」の仕事で給料を貰っている物 理学者たちにとっての必要物となっている。



ガリレイ、1564~1642

今述べたことをアインシュタインに対する当てこすりとみなす人 がいるかもしれないが、そんなことはまったくない。文明はアイン シュタインを神話として作り出したが、その神話の原型をなしてい るのが、ある天才的科学者であることにはいかなる疑いもない。彼 は感嘆すべき最良の人々の一人だ――こちら側の気分や好みがその 感嘆の念を強めているのだとしても。しかし、舞台裏では別の状況 が生じる。そこでは、「預言者は自分の故郷では歓迎されないものだ」 という法則が働き始めるのである。

話ついでに言えば、それは全然悪くない法則だ。この法則は預言 者本人には気に入らないこともあるかもしれないが、その代わり、沈黙していた崇拝者たちの 一群を主要なプロセスの参加者に変えてくれるからだ。そのような参加者がいなければ、預言 者は独りぼっちになってしまうはずだ。

一般相対性理論に話を戻そう。この理論は謎から生まれた。なぜ慣性質量と重力質量は 一致しているのか? ニュートンの第3法則

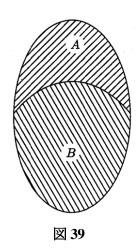
$$mw = F \tag{15.4}$$

と重力による引力の法則

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2} \tag{15.5}$$

には同一の質量mが現われる。それは(15.4)においては慣性係数であり、(15.5)におい ては重力荷である。重力荷が、いったい何の根拠があって慣性の性質を決定しているの か? なにしろ、それらは「異なるオペラ」に属する現象なのだ。

ここでは、物体の落下との関係でガリレイを思い出すのが当を得ている。ちなみにそれは、 万人に共通する盲信の驚くべき例だ。人類は 2000 年間,より重い物体はより速く落下すると 考え、アリストテレスを信じ続けていた。ガリレイはピサの斜塔から大砲の砲弾と火縄銃の弾 丸を落とした。塔の下にいた委員会がその結果を記録し、科学は別の軌道を歩み始めた。



この話は歴史の本に書かれている。しかし、ガリレイには理論的論拠があったことはそれほど知られていない。彼はこう推論した。物体AがBよりも重く、より速く落下するとすれば、AとBを連結したもの(図 39 参照)は、より重い物体としてさらに速く落下するはずだ。別の面から見ると、物体BはAよりもゆっくり落下し、それによってAにブレーキをかけるはずだ。矛盾が得られ、そこから、すべての物体は一様に落下するという唯一の結論が得られる。

これはすぐには目に飛び込んでこないことだが、この推論は誤っている。どのような物体がどのように落下するかは、まさに慣性質量と重力質量の割合に依存しているのだ。ガリレイの時代には、このこと

はそもそも視界に入っていなかった。

もちろん,重力荷と慣性係数が一致している事実は驚くべきことであり、この事実が相異なる種類の諸現象の間における何らかの深遠な関係について物語っていることは明らかだった。しかし、その説明としてもっともらしい何かすら、誰の頭にも浮かんでこなかった。アインシュタインは重力と非慣性力を空間のゆがみに置き換えることにより、天才的なブレイクスルーをなし遂げた。宇宙の見方は根底から変化した。3次元の球面あるいはトーラスタイプの閉じた宇宙モデルについて考察するのが当たり前のことになった。非線形幾何学の数学的半製品がうごめき出した。研究のための広大な領域が発生した。

一般相対性理論は 20 世紀最大の誤りだと主張している者がいる (一部の者はそれに特殊相対性理論も付け加えている)。ここは論争の場ではない。しかしもし誤謬であったとしても、その理論は現在ではきわめて磨きがかけられており、その点ではいかなる真理よりもすぐれている。しかも、いずれの側からより大きな利益が得られるかは、まだ知られていない。例えば、考え得る、また考えることすらできないあらゆる物理法則と矛盾しているラザフォードの原子モデルは、かつては巨大なポジティブな役割を果たした。

第 16 章 バベルの塔

天体観測の結果は、理論によって裏づけられない 限り信じてはならない。

アーサー・スタンレー・エディントン

外国には外国語があり、ミクロ世界には量子力学がある。ルイ・ド・ブロイの時代には、物質波について語ることは純粋のたわ言だった。その後、物理学者たちは毎晩安眠できるようにするため、自らと他の人々に対し、それは受け入れられると言い聞かせた。それはそうなった。みんな我慢してそれに慣れ、量子力学は沢山のものを計算できるようにする、法定の手品になった。特に後付けによってね、と皮肉屋たちは言っている。

しかし今にいたるまで、もっともらしい描像は存在しない。でも、そんなこと気にするな。この理論は、言わば、面の皮が厚い奴向けの理論なのだ。なにしろそこでは、謎めいた数学手品が、もっともらしい解釈と完全に両立することができているのだから。例えば一般相対性理論は、実現不可能なものを実現することに挑んでいるにもかかわらず、一部の断面においては、概念的には透明な理論になっている。沢山の事柄が普通の理解の範囲内に収まっている。空間のゆがみ、あるいは閉じた宇宙モデル(果てはないが、有限な体積を持つ宇宙) ——これらすべては、少なくとも論理的に不都合な事態を生じさせない。一般に理論のある一定部分は「居ながらにして」モデル化することが可能なものだが、特殊相対性理論、あるいは量子力学に関してはそうは言えない。

1. シュレーディンガー方程式



ド・ブロイ, 1892~1987

かつて干渉と屈折に関する素晴らしい実験によって光の波動性を立証したニュートンは、その後突然、粒子説を提唱した。 光とは粒子の流れなのだ、と。

それから 200 年余り後、ド・ブロイはその衝撃に反応するかのように、電子タイプの粒子は波であると断定した。この結論はただちに同意するには余りにもラジカルだった。しかし……。

ミクロ世界の研究は古典物理学の理解を爆破した。ラザフォードの(太陽系型の)原子モデルは様々な矛盾の重みで崩壊した。原子核の周りを回転する電子は連続的に放射を放出してエネルギーを失い、原子核に落ち込まなければならないはずだ。

ボーアのモデルは何とかしてほころびを繕ったものの,むしろ奇跡のリストに似ていた。 素粒子から残ったのは名称だけだった。電子は帯電した小球から,不可解な状態にあって 何らかの量子跳躍をすることを義務づけられたフィクションに転化した。要するに、そこ には明瞭性も、モデル全体を一つにまとめる原理もなかった。

ド・ブロイが物質波について語り始めたまさにそのとき、空中に自然な連想が浮かんできた。固定された弦はある一定の周波数で振動する。離散スペクトルは振動理論全体に浸透している。原子の放射の離散性の本性は、そういうものなのではないか?



シュレーディンガー, 1887~1961

シュレーディンガーは実験データと整合するように振動方程式を選び出した(1924 年)¹⁾。何が振動しているのかは不明だった。それゆえ、シュレーディンガー本人も含め、この行為を真面目に受け取る者はいなかった。その後、人々は味見をしてみて、これが好きになった。何が振動しているのかは今も不明だが、手品はちゃんと機能している。振動の本性に関する疑問は「確率波」によって覆い隠された。ちなみに、理論というものの権威はもはやそれほど大きくないので、その「確率波」は、「何だか分からない何かが振動している」という同値な定式に置き換えることができる。手短に言えば、プロセスはプランクをもって完了した。科学的真理というものは、それに対する反

対者が絶滅していくにつれて勝利を収めていくものだとプランクは言った。皮肉屋はここで、「それにつれて」勝利を収めていくのは真理だけではない、と付け加えるかもしれない。

さて, 方程式そのものについて二言三言。

調和振動子から遠く離れた所での電場の強度は

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)} \tag{16.1}$$

という法則に従って変化する。ここで ω は角周波数 ($\omega = 2\pi v$), k はいわゆる波動ベクトル, $r = \{x, y, z\}$ は動径ベクトルである。

ド・ブロイは光子とのアナロジーに従って波長を粒子のものとみなしていたので、波動関数として、文字 E だけを別の何かに置き換えた上で(16.1)をコピーしたものを試してみたのは自然なことだった。こうして波動関数

$$\psi(r,t) = \psi_0 e^{(i/\hbar)(Et-pr)} \tag{16.2}$$

が出現した。これが(16.1)と異なっているのは、よく知られている関係

$$E = \hbar \omega, \quad p = k\hbar$$
 (16.3)

(ここで \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの)を考慮に入れてパラメーターを書き換えたという点だけだ。

- (16.2) が満たす微分方程式は容易に作ることができる。
- (16.2) の微分は

¹⁾ ミュージシャンがメロディーを選び出すようにして。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} E \psi$$

および

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\hbar^2} \psi$$

を与える。次に,

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = E$$

より

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$
(16.4)

が導き出される。これがシュレーディンガー方程式のあり得るいくつかの書き方の一つである。 新たな方向へのあらゆる一歩は、通常、最初の一歩であり、さらなる前進を要求する。その 意味で、量子力学が(16.4)を書いただけで終わらないことは言うまでもない。

2. 波動の伝播

天上から地上に降りよう。断面積Sの棒(図40参照)に沿った圧縮パルスの伝播速度cを決定しよう。パルス中において圧力が ΔP だけ,密度が $\Delta \rho$ だけ増加したとする。時間 Δt の間にSを通過する物質の質量は

$$\Delta m = \Delta \rho Sc\Delta t$$

である。

面積 S に作用する力は、明らかに

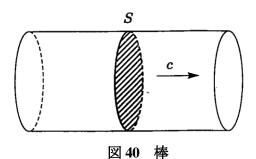
$$F = \Delta P \cdot S$$

である。運動量の変化は力のパルスに等しい。すなわち

$$\Delta mc = F\Delta t$$

であり、これより

$$\Delta \rho \, Sc^2 \Delta t = \Delta P S \Delta t$$



が得られる。これは極限移行($\Delta P, \Delta \rho \rightarrow 0$) により

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \tag{16.5}$$

を与える。

ここでは後景に横たわっている,ある重要な人道的側面に注意を払いたい。学校教育における方程式の作成に関する課題は,最大の困難を引き起こしている。後付けで考えればすべては単純なのだが,最初は手も足も出ないように見える。何を未知数に取るのか,いかなる両端を取るのか,何を何と等置するのか……。目は泳ぎ,腕はだらんと垂れ下がり,もつれた糸の塊はほどけない。

理論物理学者たちはそのような類の課題を巧みに解く技を持っている。それゆえ、呑み込みの速さ、目標設定の技能、結果を達成しようとする闘志という点で、彼らは明らかにリーダーの地位を占めていることを認めなければならない。

公式 (16.5) は物理学の縮図の一つだ。剛体棒の場合には,この公式は $c=\sqrt{E/\rho}$ (ここで E はヤング率)を与える。

気体の場合には、この問題は状態方程式に行き当たることになる。もし

$$PV = \frac{m}{\mu}RT\tag{16.6}$$

すなわち

$$P = \rho \frac{RT}{\mu}$$

に頼ることにした場合には,

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{RT}{\mu} = \frac{P}{\rho}$$

となり,ここから

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{16.7}$$

という過小な結果が導き出される。

(16.7) の誤りは、音の振動の場合には、温度が等しくなるだけの時間はないという点にある。それゆえ(16.6) の代わりに、断熱過程

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \text{const}, \quad \exists n \downarrow b \ c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

を検討する必要がある。この式は、もうこれだけで音速を正しく決定している。

ところで、公式(16.5)の導出に対しては沢山のクレームを提起することができるはずだ。その第一は、速度 c の概念それ自体が不確定であることである。例えば、パルスの形

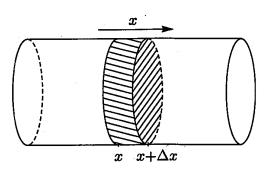


図41 圧縮の伝播

状はtに依存している可能性があり、その場合、cとは一体何なのか分からなくなる。しかし我々はそれを視野の外に置いておくことにしよう。ましてや、1次近似においては結果は正しいのだから。

それとは別の観点も存在権を持っている。その観点は、この課題を最後まで「絞り切る」ことを要求している。しかしその場合には、人口の1%の人間がアルコールの99%を飲むことになることを考慮に入れる必要がある。それとまさしく同様に、努力の1%が課題の99%までを解くことになる。さて、誰かが課題を100%完全に解きたくなったとすると、その不足している1%のために、きわめて多大な労力と時間を費やさなければならなくなる。

今度は事の別の側面に注意を払おう。棒がx軸に沿って配置されているとすると,圧縮率u(x,t)は一般的な場合には2変数関数になる。u(x,t)が満たす微分方程式を見出そう。2つの断面xと $x+\Delta x$ (図 41 参照)およびそれらの間に挟まれている体積 $\Delta V = S\Delta x$ について検討する。断面xに作用する力は

$$kS \frac{\partial u}{\partial x}|_{x}$$

である。ここで、k は課題の物理(気体か、剛体棒か)によって決定される。体積 ΔV に作用する合成力は

$$F = kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x + \Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x} \right) = kS \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} \Delta x$$
 (16.8)

となり、このとき、ニュートンの法則が波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.9}$$

を与える。ここで $c=\sqrt{k/\rho}$ は波動の速度であり,すこしこじつけて言えば, $\partial^2 u/\partial t^2$ は加速度である。

空間に移行した場合:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

3. 熱伝導方程式

熱伝播方程式の導出の場合には、前節における推論の大部分を、変更を加えずにそのまま残すことができる。(16.9)の代わりに、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{16.10}$$

が得られる。ここでT(x,t)は、x と t の関数としての温度である。この場合には、体積 ΔV に流れ込む熱量

$$Q = kS \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x$$

が(16.8)の力のアナロジーとなる(今回の場合, k は熱伝導率)。

さらに、その同じQは別の方法で計算される。すなわち、

$$Q = \rho \lambda S \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

である。ここで、 λ は熱容量、 $\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t$ は時間 Δt の間における温度上昇である。これより、

(16.10) $\mathcal{O} a \ \text{lt} \ a = k/\rho \lambda \ \text{tt}_{3}$

このように、前節の場合との原理的な違いは、この状況ではニュートンの法則のアナロジーが働かないという点にある。その結果、時間に関する第2次導関数は第1次導関数に取って代わられる。

4. 神秘的な相似性について

これより前の2つの節における推論のスキームは、ディテールを省略した形にすると、物理学の諸課題の大部分を覆い尽くすことになる。運動に影響を及ぼす、力Fに類するもの、そして注意の焦点を決定する、Z 座標に類するものが常に存在している。しかも、次のわずか2つのバリエーションしかない(例外について語らないならば)。

- (i) 力は運動を生み出す、すなわち $F=k\dot{z}$ (F=0のとき、運動は停止し、 $\dot{z}=0$)。
- (ii) 運動は慣性に従って生じ、力が加速度を決定する、すなわち $F = k \ddot{z}$ 。

別の領域へ(例えば力学から光学へ)移行すると、力にも座標にもメタモルフォーゼが生じる。しかし、本質的には何も変化しない。ばね振り子は方程式 $m\ddot{x}=-kx$ によって、ねじれ振動は方程式 $I\ddot{\varphi}=-k\varphi$ によって記述される(ここで φ は角度、Iは「ねじれるもの」の慣性モーメ

ント、「力」 $k\varphi$ は普通の力のモーメント)。電気振動回路へ移行する場合には、装飾品はそれよりも顕著に変化するが、方程式は同一で、

$$L\ddot{q} = -\frac{q}{C}$$

となる (ここでqは電荷, Lはインダクタンス, Cはキャパシタンス, 「力」q/Cは電圧)。

それゆえ、相異なる種類の応用領域の間における深遠な関係についての話は、ある程度までいたずらっ気から、あるいは知識不足から生じている。物理学はそのすべての領域において、今にいたるまで主として微分方程式に依拠してきた。それゆえ、諸結果の間における「神秘的な相似性」の根源はかなり明白だ。それは、それぞれの方程式は同一で、違いは係数の呼び方にしかないということだ²⁾。

その際には複素数が幅広く用いられているという話を、もう一度する必要がある。原理的な面については既に第 1 章ですべてが語られている。数学は算術演算に立脚しているわけだが、その算術演算にとっては、複素平面がプレイグラウンドなのだ。しかし、今言ったことはあまりにも一般的だ。知識のいくつかの領域はそのグラウンドの周縁において、虚数単位なしでもちゃんと機能している(例えば簿記)。微分方程式が「グラウンド全体でプレイしている」理由は、具体的にはどこにあるのだろうか? しかも、 $\cos \omega t$ からただちに話を始める代わりに、事前の助力を頼りにして、

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

から話が始められている。実在する振動 $\cos \omega t$ に対し、これといった必要性もないのに虚構的な $i\sin \omega t$ を付け加えるのは、何のためなのか?

その主な理由は $e^{i\omega t}$ の微分

$$(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t} \tag{16.11}$$

の性質にある。すなわち、導関数の計算は $i\omega$ を掛けることに帰着し、積分は $i\omega$ で割ることに帰着するということだ。単純さという点で、本質的な利益が得られるのである。

これはそれでもやはり、事の本質に触れない便宜の問題のように見えるかもしれない。それは違う。時には量が質に転化することが実際にあるのだ。ごくわずかな技術的単純化でさえ、あれこれの科学領域を一歩一歩、別の段階へ引き上げることができる。そこでは思考の新たなカテゴリーが生まれ、それを表現するためには旧来の言語がいっさい役に立たない法則性へと通じる、まったく新たな道筋に沿った発展が始まる。

線形微分方程式の理論において、(16.11) の性質は多かれ少なかれ算術にとっての位取り記数法のようなものになっている。もちろん、一般的に言って様々な関数を相手にしている微分方程式において $e^{i\omega t}$ が比較にならないほど大きな役割を演じていることは、奇妙に見えるかもしれない。それには2つの理由がある。第1に、線形微分方程式においては、中心的役割は実

²⁾ もちろん、我々は事の一側面にしか注意を集中していない。

際のところ調和振動に割り当てられている。第2に、関数のフーリエ級数展開(調和振動の和の形での表現)は、一般的な場合に(16.11)の性質を効果的に利用することを可能にする。

もちろん,この問題全体の完全な評価を行うためには、当該の領域全体を独自のルートをた どって踏破する必要がある。一般的な判断はコンパスとして有益だが、経験、とりわけ、さん ざんな経験の代わりになることはできない。例えば、次の和の計算³⁾

$$S = \cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \dots + \cos(\omega t + n\varphi)$$

を行う場合には,

$$Q = e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \varphi)} + \dots + e^{i(\omega t + n\varphi)}$$

を検討することが有益だと、即座に言うことができる。後者の式は、 $e^{i\varphi}$ を指数とする等比数列の和

$$\Omega = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}e^{i\omega t}$$

として容易に計算できるからだ。結局のところ、最終的には $S = \text{Re}(\Omega)$ になる。しかし、もし誰かがそれよりも前にSの計算でひと苦労する幸運に恵まれたとしたら、その方がはるかに有益だ。その場合には、虚構的な虚部を付け加えるという手品はまったく別の照明を当てられ、扱いにくいSの和の等比数列の和への変換が、ちょっとした発見のように見えることだろう。

5. 量子力学についてさらに

シュレーディンガー方程式(16.4)を1次元の場合について

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{16.12}$$

と書こう。(16.12) はある意味で、波動関数 (16.2) の形に関する予想から導き出されたものだと言うことができる。今度は、いかなる関数が (16.12) を満たすのかを検討するのが自然だ。そのような関数は沢山(つまり、思っていたよりも多く)存在していることが分かる。ここから先では「サッカー」が始まるのだが、それは、仮説的推論の領域における面白い訓練になっている。

(16.12) の解の中には

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \tag{16.13}$$

という解がある。(16.13) を (16.12) に代入して $e^{-iEt/\hbar}$ で通分すると、振幅 $\psi(x)$ に関する 方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \tag{16.14}$$

が得られる。

³⁾ この計算は回折格子に関する課題を解く過程で生じる。

離散スペクトルはおよそ次のようにして生じる。(16.14)の解となるのは

$$\psi = a \sin(kx + b), \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

である。粒子が境界条件 $\psi(0)=\psi(l)=0$ によって線分[0,l]の中に封じ込められている場合 4 には、

$$kl = n\pi$$
; $n = 1, 2, \cdots$

を要請することによってその境界条件を満たすことができる。このことがあり得るエネル ギーの離散的な組

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \tag{16.15}$$

を与える。すなわち、(16.3) による周波数の離散的な組をも与える。

水素原子の離散的スペクトルを決定するのは、それよりほんの少し複雑なだけだ。実験データとの一致が議論の円を閉じ、そして理論はよく働いてくれるツールとしての正式な地位を獲得する。解釈愛好家たちが神話を考え出し、教科書を書く。

これはけっして物理学者たちを非難して言っているわけではない。彼らは実際、感嘆に値する。古典的な数学者は彼らとは別の規約に縛られているので、彼らの領分ではあまり頭が冴えなくなるのだ。(16.2)から(16.15)へと導く短い連鎖のスケッチを眺めてみると、そこでの論理を検討する能力を持っているのは物理学者だけだ。例えば電気力学においては、現実の測定可能な量(場の強度)の振動が波動方程式の解となっている一方、複素解の利用は便宜の問題とされている。量子力学ではその逆だ。振動の物理学的解釈は存在せず、余計な問題が生じないようにするため、波動関数は最初から複素関数として定義されている。よくよく考えてみると、これは天才的な一手だ。

今述べた理由により、シュレーディンガー方程式は既にそれ自体が虚数単位を含んでおり、それゆえ(16.9)あるいは(16.10)のタイプの方程式とは原理的に異なっている。にもかかわらず、シュレーディンガー方程式はそれらのタイプの方程式と響き合っている。もし話が(16.15)のタイプの離散的スペクトルの探究のみについて進むのであれば、ψ関数を中間的作用のための便利な関数とみなすことにより、すべてをそのような位置に留めておくことが可能だ。しかし、量子力学には我々が言及しなかった沢山の課題がある。それゆえ、「虚構」を明るみに引っ張り出し、例えば、まさに電子の解釈の研究のために適応させなければならない。現在、ψ関数の解釈に関する問題はより先鋭になりつつあるが、「解決」という言葉の以前における意味において、この問題はいまなお解決されていない。論理の探究は確率波で停止する。これは苦境の最適な打開策であることを認めなければならない。振動しているのは依然として「何だか分からない何か」であるが、しかし事の外側はまさに確率的であり、それに相応した言語が用いられている。

⁴⁾ この場合、粒子はポテンシャルの井戸の中にあると物理学者たちは言う。

全体として見ると、量子力学は広大な範囲の諸現象をその理解を欠いたまま巧みにさばくことをマスターした、きわめてユニークな科学領域である。物理学者たちは理解という問題に関して議論することができるが、それは用語の問題にすぎない。普通の概念による解釈が存在しない点について聴衆が当然感じる苛立ちは、物理学者たちに対してではなく、むしろ創造主に対して向けなければならない。。

我々が物事を**根本的なところから**理解できていないことの深刻さについて言えば、その 深刻さはすべての科学領域において一様だ。量子力学のいいところは、そこではその深刻 さがはっきり目に見えるということだ。

第17章 ちっぽけな課題の偉大な役割

ある原理についての知識は、ある事実についての 無知を埋め合わせる。

クロード=アドリアン・エルヴェシウス

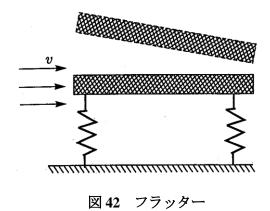
科学に対する称賛は、何かその例を示して欲しいという懐疑論者たちからの要請に出くわすことが時折ある。いわく、実践の場で適用されるような定理を見ることはできないのか? ところが、提示するものは何もないことが判明する。パラドックスのようなものが得られる。科学の役割は否定し難い――ロケットは飛んでいるし、コンピューターはちゃんと計算しているのだから。しかしそのとき、ニュートンの2項定理はそれと何の関係があるのか?

もちろん、戦闘に勝利するのは軍隊であって個々の兵士ではない、とは言うことができる。しかし、ここでの問題は別のところにある。奇妙なことに、科学を前進させているのは、もっぱらちっぽけな課題なのである。他ならぬそのような課題が成功の90%を保障しているのだ。

1. フラッター効果

前世紀の30年代,新型高速飛行機の説明不可能な事故が発生し始めた。正常に飛行していたのに、突然信じられないほどの力の衝撃が生じ、機体が破片になって飛び散る。

気体力学の教科書にそんなことは書かれていなかった。ペンをとらねばならなくなった。 その際、飛行機の翼型に沿った気体の流れどころか、丸太形の物体に沿った気体の流れに ついてさえ、それを研究しようという考えが誰の頭にも浮かんでこなかったのは興味深い。 最初に取り上げられたのは気体流の中に弾性的に固定された板で、それに関する方程式が 書かれ、長い時間をかけてテストが行われ、失敗が繰り返された。それからやっと、後に フラッターと名づけられることになる効果(図 42 参照)を「捕まえる」ことができた。



各種パラメーター(速度,弾性,大きさ)がある一定の相関関係にあるとき,特異な種類の爆発的な力学的不安定性が発生することが明らかになった。その後,それ以外の多数の研究や風洞実験が行われたことは言うまでもない。しかしそれでも結局,長方形の板を用いたあの最初の課題が決定的な役割を果たし,この現象の本質と定性的法則性を解明した。

2. 宇宙モデル

ちっぽけな課題は、宇宙に挑戦するときにさえ答えを与えてくれる。ハッブルは「赤方偏移」について研究し、諸銀河が「後退の中心」までの距離rに比例して速度vで後退していること、すなわち

$$v = Hr \tag{17.1}$$

(ここでHはハッブル定数) であることを立証した。



フリードマン, 1888~1925

多くの人は、膨張宇宙論の背後にはきわめて複雑な数学があると思っている。まるでそれが、解決されるべき課題の壮大さに相応しているかのように……。しかし、ここでの多くの問題に対する答えは単純極まりないモデルに依拠することによって得ることができるのだ。宇宙の全物質の質量Mが半径Rの球体を一様に満たしていて、それぞれの物質点の速度は法則(17.1)によって決定されていると仮定する。ある領域の端に存在する質量 Δm のある粒子について検討しよう。その速度は

$$v_R = HR, (17.2)$$

運動エネルギーは

$$E_{\rm kin} = \frac{\Delta m v_R^2}{2} \,,$$

ポテンシャルエネルギーは

$$E_{\rm pot} \approx -\gamma \frac{M\Delta m}{R}$$

(ここでγは重力定数)となる。

エネルギー保存則

$$\Delta m \left(\frac{v_R^2}{2} - \gamma \frac{M}{R} \right) = \text{const}$$
 (17.3)

より、次のことが導き出される。(17.3) の定数が0より大きい場合には、膨張は無限に続く、すなわち

$$v_R^2 = 2\gamma \frac{M}{R} + k$$
, $k = \frac{\text{const}}{\Delta m}$

となり、0より小さい場合には、

$$R = -\frac{2\gamma M}{k}$$

に達したとき、膨張は停止し、収縮に取って代わられる。このように、等式

$$v_R^2 - 2\gamma \frac{M}{R} = 0 ag{17.4}$$

が境界の状況を決定する。(17.4) $\mathbb{C}v_R = HR$ と

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

を代入すると

$$R^2 \left(H^2 - \frac{8\pi}{3} \gamma \rho \right) = 0$$

が得られる。これより宇宙における物質の臨界密度

$$\rho^* = \frac{3H^2}{8\pi\nu} \tag{17.5}$$

が得られる。これは、フリードマン (膨張宇宙論の創始者) が一般相対性理論にもとづいて得た推定値と正確に一致している。

ここでは、さらにもう一つの「大問題」をわずかな労力で解決することができる。

宇宙における物質の平均密度の推定値は臨界密度(17.5)に近い。それゆえ,(17.4)は近似的な形で,すなわち

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{2\gamma \frac{\mu}{R}} \tag{17.6}$$

または

$$\sqrt{R}dR = \sqrt{2\gamma\mu} dt$$

の形で生じることになる。これを積分すると(0からRまで、および0からtまで)、

$$\frac{2}{3}R^{3/2} = \sqrt{2\gamma\mu}t$$
 (17.7)

となる。今度は(17.6),(17.7)と

$$\frac{dR}{dt} = HR$$

を連立させて解くと, 宇宙の年齢

$$t = \frac{2}{3H} \approx 10^{10} \, \text{F}$$

が得られる。

今述べたことで驚かされるのは、課題の複雑さとモデルの単純さとのコントラストだ。 奇妙なことに、単純素朴なほどに初歩的なアプローチが、現代宇宙論との強い矛盾に陥る ことなく宇宙創成について語ることを可能にしている。言うまでもなく、聖書はその足元 にも寄りつけない。

3. 単純化の力

普通,単純化されたモデルは諸事情に対する一時的譲歩と受け取られている。そこでは 教育上の目的が暗黙のうちに理解されていて,次の段階においては(そこへはけっして到 達しないのだが),あらゆるディテールを含んだ正真正銘の課題の設定の仕方が検討される ことになると思われている。

実際には、大部分の場合、「次の段階」は不要であり、有害でさえある(霧を立ち込めさせる [=問題を不明瞭にする] からだ)。

走り幅跳びの選手が教科書を読んでいたら、水平に対してある角度で放出された物体の飛行 距離を決定する公式

$$l = v \sqrt{\frac{8h}{g}} \tag{17.8}$$

にたまたま出くわし、何か考え込んでいる様子を思い浮かべてみよう。

跳躍の遠さ(各人は周囲の世界を自分を基準にして計量するものだ) [m] は、v および h の根のみに比例していることが分かる。こうして、助走速度が例えば 3%増加すれば、l も 3%増加する。ところが h (跳躍高さ)のそれと同じ増加は、跳躍距離においてはたった 1.5%の利得しか与えない……。これはトレーニング戦略の選択にとってなかなか興味深い情報だ。

公式 (17.8) は疑いもなく単純素朴なものであるにもかかわらず、陸上競技の文脈において はある種の本質をしっかり捉えている。しかし、課題の設定の仕方を複雑化したとき、この公 式に含まれている価値全体が増加するとはとても思われない。

きわめて単純な「捕食者-被食者」の動的モデルは微分方程式系

$$\dot{x} = (\alpha - \beta y)x
\dot{y} = (\gamma x - \delta)y$$
(17.9)

(ここでx,yはそれぞれ被食者と捕食者 (ヒツジとオオカミ)の数) によって記述される。 速度 \dot{x} はxに比例しているが,比例係数 $\alpha-\beta y$ はオオカミが増えれば増えるほど小さくなる。また逆に,捕食者の個体群の増加係数 $\gamma x-\delta$ はヒツジが増えれば増えるほど大きくなる。

[「]駅注」 ロシア語では幅跳びにおける「跳躍距離」の場合の「距離」を「遠さ」という単語で表す。() 内の「各人は……」という言葉は,「跳躍選手が自分を基準として見れば,距離は遠さになる」ということを意味している。

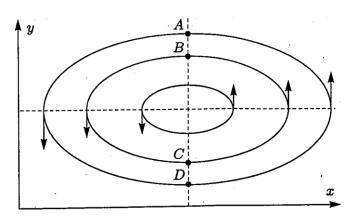


図43 「捕食者-被食者」の動的モデル

このモデルはかなりの程度まで条件付きで、しかも近似的なものではあるが、現実に存在する効果を反映している。解析が示すところによれば、(17.9) の解は振動性を持ち、系は楕円タイプの閉じた曲線に沿って運動する(図 43 参照)。現実においても、このような種類の振動が実際に生じている。さてそこで、点A においてオオカミの選択的射殺が行われ、その結果、系は点B に跳び移るとしよう。それ以降の運動はより小さい楕円に沿って行なわれるようになるが、これは直観的にも予想することができる。今度はオオカミの数を点Cで減少させてみよう。系は点D に移行し、より大きな楕円に沿って運動するようになる。振動の幅が増大する。これはもはや直観に反している。しかし現実は、このような種類のメタモルフォーゼが存在することを裏づけている。選択的射殺の時点の選択が系の挙動に本質的な影響を及ぼしていることが分かる。

今検討したモデルをより正確にするために真剣に修正作業を行うことは、おそらく賢明ではないだろう。すべてを測定して分類棚に配置しようとする試みは、生物学は物理学ではないということを示す。個体群というものは、100万年間その軌道を堅持する惑星ではない。そこではすべてが「息づいて」おり、些細なことに対して反応する。系は絶え間なく再構成されている。係数は、統計が処理される速度よりも急速にドリフトする……。

それゆえ,「測定して計算する」のは,不正確に設定された目標だ。もちろん物理学は偉大な科学だが,その思想的経験はあらゆる分野で模倣するのには適していない。しかも物理学自体が,そこでは正確な予測を行うことが原理的に不可能な,新たなタイプの問題と遭遇することがますます多くなっている。

4. あり得ない. だが事実だ

温度の異なる2つの物体を、それらが互いに温度を交換するように接触させることは可能か? 多くの人には、この問いは馬鹿馬鹿しく思えるだろう。2つの物体が接触したとき、熱は熱い方から冷たい方へ移動することはよく知られているのだから。温度が等しくなっ

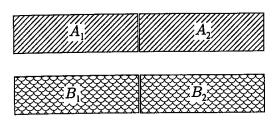


図44 物体AとB

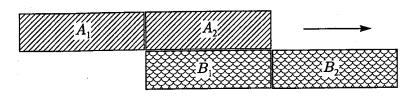


図 45 第1段階

たとき, そのプロセスは停止し, 平衡状態が訪れる。それにもかかわらず, 正しい答えは **イエス**なのだ。

この課題を解決するのは動的接触である $^{1)}$ 。我々は正確な解を与えるつもりはない。ちっぽけなモデルを検討しよう。 2 つの物体 A のあり,それぞれは右半分と左半分の 2 の部分 A ={ A_{1} , A_{2} }, B ={ B_{1} , B_{2} } からなっているとする。 1 つの物体の右半分と左半分の間の熱伝達はきわめて小さく, A と B の間の熱伝達は急速である(図 4 参照)。

初期温度は $A:100^\circ$, $B:0^\circ$ とする。接触は4つの段階に分けて行う。まず最初に A_2 と B_1 を接触させる。その結果, A_2 と B_1 は等しくなり, 50° になる(図 45 参照)。

第2段階における接触は図46に示されているように行う。容易に見て取れるように、等 しくなった後の温度は

$$A_1, B_1 : 75^{\circ}, A_2, B_2 : 25^{\circ}$$

となる。

第3段階(図47参照)は次の温度を与える。

 $A_1:50^{\circ}, A_2:25^{\circ}$

 $B_1:75^{\circ}, B_2:50^{\circ}$

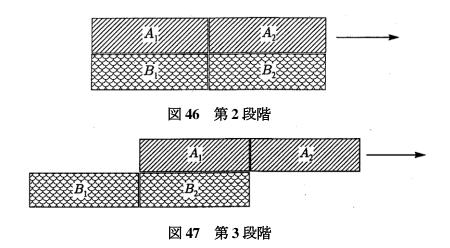
最終段階: 2つの物体が引き離され、それぞれの右半分と左半分の温度が等しくなった 後の温度は

A:37.5°(最初は100°だった)

B:62.5°(最初は0°だった)

となる。古典的熱力学の観点から見ると、これはきわめて驚くべきことだ(温度交換の際、2つの物体が「平衡状態をまんまと通り越してしまった」のだから)。

¹⁾ 熱交換に関する普通の理解は静的(静止)接触と関係している。



実際,完全な温度交換は達成することができなかったわけだが,しかし今や,どの方向に運動する必要があるかが明らかになった(各物体の要素の量の増加,次に連続的バリエーションへの移行)。

ここではちっぽけなモデルの役割をどのように特徴づけることができたか? そのモデルは何を与えるか? もちろん第1に,照明。新たな可能性の発見……。第2に,一般化のために用いられるお手本,そして,より複雑な課題のための踏み固められた道(それは逆流にもとづく温度交換という,既に開拓されたニッチにおける道だけではない)。

注記と補足

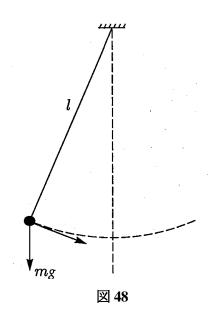
1. ポアンカレの宇宙モデルは半径 R の球体である。球体内の温度は一様ではない。その温度は中心において最大であり、境界をなす球面上では絶対零度まで低下する。より正確には、その温度は R^2-r^2 (ここでrは検討している地点から中心までの距離)に比例している。

以下においては、すべての物体は同一の熱膨張係数を持っており、しかも任意の物体の線形 寸法は絶対温度に厳密に比例していると仮定しよう。さらに、このモデルは、そこでの任意の 対象物がある地点から異なる温度を持つ別の地点に移動したとき、新たな周囲媒質との間で即 座に熱平衡状態に達するという性質を持っているものとする。

興味深いのは、この宇宙が、その住人たちには無限大に見えるということだ。実際、もし住人たちが境界をなす球面に近づきたくなったとすると、彼らはそこへ近づくにつれて冷たくなってゆき、寸法が縮小してゆく。したがって彼らの歩幅は短くなり、彼らは自分が住んでいる世界の境界にいつまで経っても到達することができない。ここにはとくと考えるべきことがある。例えば、この世界の住人たちは温度の存在を検出することが可能なのか……。

もちろん,このモデルは我々の世界がどんな構造になっているかを説明していない。その代わり,思考の新たな方向を与え,間接的な形でドグマを弱体化させ,我々をドグマから解放してくれる……。

2. フラッター効果のメカニズムを理解するためには、力学方程式を書いてそれを解き、解析を行い、失敗して、何度も最初からやり直さなければならない。面白いことに、洗練された技能を必要としない、この現象の法則性のもう一つ別の解明方法がある。



ここで念頭に置かれているのは、次元をチェックするという方法である。それは近似的には、振り子の振動周期Tの決定に関する課題(図 48 参照)における次元チェックと同様の方法だ。Tが依存し得るのがm,g,lに対してのみであることが事前に明白な場合には、この問題は、時間の次元を持つm,g,l0組み合わせを探し出すことに帰着する。そのような組み合わせはただ一つ、 $\sqrt{l/g}$ 0 みであって、質量mは無関係であることが分かる。それゆえ、

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(ここでkは何らかの無次元定数)となる。

この方法は多くの複雑な状況で良く機能し、しかも物理学的にも数学的にも完全に厳密である。ここでの哲学は単純な判断に依拠している。それは、この課題の解は用いられている単位系には依存し得ないという判断だ。すると、この課題は何らかの関数従属性と関係した無次元パラメーターの組²⁾によって特徴づけられなければならないということを、単純な推論が示してくれる。

さてそこで、理想流体の中に弾性的に固定された翼(板)について検討しよう(気体の代わりに非圧縮性の一様な流体とすることで、課題が若干単純化される)。この状況はパラメータ

$$E, \mu, m, \rho, l, v \tag{17.10}$$

によって決定される。ここでEはヤング率, μ は剛性率,mは翼の質量, ρ は流体の密度,lは代表長さ, ν は臨界速度である。

(17.10) の組から、次の3つの無次元パラメーターが組み立てられる。

$$\frac{\rho v^2}{E}, \frac{\mu}{E}, \frac{m}{\rho l^3}$$

これらの各パラメーターは、残りの 2 つのパラメーターの未知関数として表すことができる。 これより

一一つ $T\sqrt{\frac{g}{l}}$ であり,関数従属性は $T\sqrt{\frac{g}{l}}=k$ である。

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \, \varphi \left(\frac{\mu}{E}, \, \frac{m}{\rho l^3} \right) \tag{17.11}$$

が得られる。もちろん,ここには未知関数 φ が現われている。それでもなお,公式(17.11)は フラッターの法則性の理解における著しく大きな一歩となっている。例えば,剛性のn倍への 増加(E, μ o n 倍への増加)は臨界速度を \sqrt{n} 倍しか増加させない。

3. この話のテーマへの興味深い注として、免疫モデルを紹介しよう。免疫のメカニズムは長い間、幅広い分野の研究とノーベル賞の源泉になっていた。そこで深刻なつまずきの石になっていたのは、「自己」と「他者」を区別し、異質なものだけを排除するという、免疫システムが持つ謎めいた能力だった。様々な観察結果や事実を単一のモデルにまとめることが、どうしてもできなかったのだ。

ブレイクスルーをなし遂げたのはフランク・バーネット(1961 年ノーベル生理学・医学賞)だ。彼の理論は次のように再構成することができる。あらゆる生体は、構成成分 w_i (各種タンパク質、等々)および w_i を消滅させる能力を持つクローン k_i から構成されている。クローンが何であるかは重要ではない $^{3)}$ 。重要なのは、クローン k_i は w_i を消滅させる(食べる)ことによってより強力になり、自らの機能をより効率的に行う能力を獲得するということだ。胚発生段階においては k_i は弱く、 w_i と接触すると消滅する。すなわち、自らの生体の構成成分に対応するクローンのみが消滅するということだ。

単純化した説明の仕方に不満を言わないことにすれば、これが彼の理論のすべてである。この理論はきわめてエレガントで調和がとれており、宇宙の構造に融合しているような感じがする。もちろん、上に叙述されているような形においては、このモデルは生物学そのものとしっかり関連づけられておらず、宙ぶらりんの状態にあるように見える。しかし、ちっぽけな形で表現されているにもかかわらず、このモデルは明瞭な描像を与え、(50年昔の当時としては)驚くべき帰結をもたらしている。例えば、胚発生段階においては w_i が k_i に勝つのだとすると、組織不適合性を克服するためには、オリジナルなトリックを提案するのが論理的だ。 つまり、胚Aに対しては胚Bの構成成分の吸収を導入することを、胚Bに対してはその逆のことを提案するのだ。その場合、A,Bの成熟した生体は互いの間で支障なく生体移植することが可能になる。この考えは仮説として気違いじみているが、かつて、これに該当する実験がセンセーションを引き起こした(再びノーベル賞の花火が打ち上げられた)。

³⁾ 食細胞や抗体に関する話はここでは全体像を混乱させるだけだ。

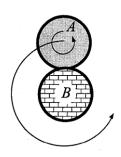
第 18 章 パラドックスを生む犯人としての直観

矛盾を感じ取ることが、錯誤のうちに 居続けることを妨げる。

XYZ

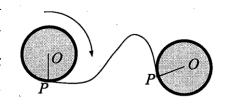
根本的なパラドックスは宇宙の構造と根元でつながっている。しかしそれでもやはり、 矛盾の大部分は頭の中にある。

静止している円Bに沿って滑らずに回転する円Aは、円Bの周りを 1回転する間に、それ自体は2回転するということには、誰もが同意 するわけではない。

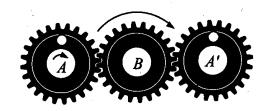


錯誤に導くのは「勘」だ。もしそれが鈍い勘だとしても。思考はすべての物事をそれにとってふさわしい場所に置く。平らな道路上を転がる車輪は、その周長と等しい距離を通過する間に1回転する。前段に挙げた例の場合、Aはそれと同じ距離を通過するが、その道路は平らではない。道路の断面が曲がっている場合には、点Pが路面に戻ったとき、動径ベクトルOPは1回転し終えていないということがあり得る。OPの新たな状態は元の状

態に対して平行ではないからだ。この認識が、思考を 死点からシフトさせる。そして、道路の断面が閉じて いるときに「さらに1回転」を付け加えるとはどんな ことなのかが、多少なりともはっきり描き出されるよ うになる。

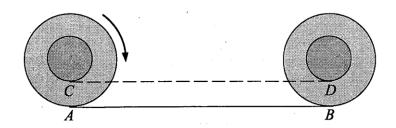


しかし理性の規律が欠如していると、潜在意識は前回と同じ過ちを簡単に繰り返す。



歯車Aが静止している歯車Bに沿って半回転だけ 転がり、状態A' に移行したとき、直観的には歯 車A は「逆立ち」しているように思われる。とこ ろが、ノーなのだ。

大きい車輪が滑らずにAからBまで転がり、大きい車輪の上に描かれている小さい車輪がCDに沿って「転がる」という、上の例に近い趣旨の状況においても事態は改善しない。



大きい車輪よりも半径が小さく、それと同一の角速度で回転しているにもかかわらず、小 さい車輪はそれと同一の距離を通過するのである。とんでもないことになった。

1. 論理的色覚異常について

色覚異常者を発見するための色覚検査表、幻視や錯視――これらすべてのものは、精神的・論理的な領域にもそれに類似したものが存在するのではないかという考えを抱かせる。よく知られている例を取り上げてみよう。上下ひっくり返しても図柄が変わらないことが、





最初は少なくとも奇妙に思われる。180°回転させると少女が老婆になる。想像力は罠に落ち、右側の絵のうちに左側の絵を見て取れない状態になる。論理的判断もまさにそれと同様に、誤ったアクセントの置き方、副次的な共振——要するに様々なゲージの不正確性の作用の下で、メタモルフォーゼにさらされる。

直観が最もしばしば罠にとらわれるのは、踏み慣らされた道を進んでいくときだ。そのような道は、別の課題を解決する目的で「踏み固められた」ものだからだ。特徴的な罠を二、三挙げてみよう。

1. 地球の周囲を赤道に沿ってロープでしばった。ロープが 10 m 余った。そこでロープの両端をつなぎ、赤道と同心円になるようにロープを張った。問い:ロープと地球の間の隙間はどれだけか? 大部分の人は、その隙間はアリも通り抜けられないほど小さいと考える。ところが



$$2\pi(R+x) - 2\pi R = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{2\pi}$$

という計算は、隙間は $1.5 \, \mathrm{m}$ より大きく、赤道の長さにはまったく依存していないことを示している。

この錯誤の源泉は注目に値する。潜在意識は規律正しく考えることを望まず、課題が惑星規模であることにとらわれる。その規模を背景として見たとき、10 m はまったく取るに足らない。



2. 縮尺

1:10 000 000

のロシア地図上では、寸法は 1000 万分の 1 に縮小されている。1億 5000 万人の人口をそれと同じ比率で減少させると 15 人が残る。彼らには十分な場所があるように思える。しかし、その地図上では 1 人でも窮屈なのだ。

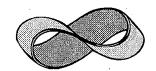
もちろん、幼稚園。寸法を 10^7 分の1 に縮小すると、面積は 10^{14} 分の1 に減少する。にもかかわらず回答者の99%は初歩的概念を注視しようとせず、単純な知的怠惰によって袋小路に陥る。

3. 帯の片方の端を半回転ひねってから両端を貼り合わせることによって得られるメビウスの帯の表面は、周知のように1つの面しか持たない[=単側面 (one-sided surface) である]。



模型を作り、それとつき合うことに意味がある。もちろんそれは、2 つの面がないことを確かめるためではない。それは多かれ少なかれ自明なことだ。しかし残念ながら、想像力の蓄えはここで尽き果てる。「帯」を円方向の中心線に沿って切るとどうなるかを予見する者は少ない。得られるのは、他の様々な例によって育てられた直観が予想する 2 つの帯ではなく、1 つの帯だ。その帯は 2 回の全回転、つまり 4 回の半回転分だけひねられている。最初の帯を帯の縁から 3 分の 1 だけ離れた線に沿って切った場合には、2 つの帯が得られる。

もう1つの意外な話は**2重のメビウスの帯**に関するものだ。これは、2つの紙の帯を互いに重ね合わせた状態で半回転ひねってから両端を貼り合わせることによって得られる^[釈注]。一見したと



ころ、そこには、互いに他方の中に収まっている2つのメビウスの帯があるように思われる。ところが重なっている2つの帯を展開してみると、帯は1つしかない。その帯は「半径が2倍」で面が2つあり、4回の半回転分だけひねられている。

 $[\]mathbb{C}^{\mathbb{R}^{[k]}}$ 模型を作る際,2 つの帯の両端の貼り合わせは下の断面図のように行う。①と②*,②と①*をセロハンテープで貼り合わせる。 ①-②*と②-①*の間(つまりは重なっている2 つの帯全体の間)は隙間になる。



単側面の挙動は、視覚的な勘のアキレス腱を実例によって示している。すべて――紙とハサミ――は目の前に見えているが、その結果は予見されない。

2. 直観の内幕

もちろん,以上に挙げた諸例は直観にとって有利なものではなかった。心臓,ホルモン,消化をつかさどり、何を恐れるべきか、誰を愛するべきかをささやく潜在意識は、直観の等価物として、他人の畑においては常に申し分ない状態にあるわけではない。「それ」がどのように働いているのかを理解できるようになることを期待するとすれば、もちろんそれは自信過剰というものだろう。しかし、直観の諸側面のうちの一つは、多少なりとも意識の表面部分に存在している。直観というものは、観察される様々な状況をいくつかのグループに統合し、パターンを識別する学習機械のように働いているという印象を受ける。追跡されるパラメーターは多数存在するため、最初のうち、得られる諸パラメーターの分類は愚かな分類のように見える。幼児がネコと遊んでいるとき、ハチが幼児を刺した。潜在意識はまず手始めに、ネコを危険な対象物として識別する。その先どうなるかは、「歴史の歩み」に依存している。もし不幸にしてそれと同じ状況が繰り返された場合には、ネコ恐怖症が形成されるかもしれない。しかし、その後における人生経験が分類の誤謬を払拭することになる公算が最も大きい。

要するに、このメカニズムは条件反射の形成メカニズムを思わせ、それと一致しているとさえ言うことができる。土器づくりであれ数学であれ、あらゆる職業分野においてそれと同じことが起きている。しかし、生存にとって重要な事態の識別学習は何100万年も続いており、防御に関する多数の学習結果が遺伝子に反映されているのに対し、数学的テーマが直観という石臼に入ってきたのはごく最近にすぎないという違いがある。その石臼の「出力側」から出てくるものは、今のところ成果より失敗の方が多い。遺伝子においては、数学的なものはまだ何も感じられない。それでも個人的経験の範囲内では、ときには成功が生じることがある。そしてより多くの課題が解決され、より多くの疑問が熟考されればされるほど、直観のカバンの中の「屑」はより少なくなる。それゆえ、潜在意識の適格性を拡大するためには、何回もの反復が不可欠だ。解いて、解いて、解かなければならない。さもないと直観の中の霊長類時代に育まれた部分が、数学において作用してしまう。

3. そして発展に対するブレーキとしてさえ

直観は錯誤を固く凝結させることにより、様々な形で発展にブレーキをかける。例えば暗号学において、直観的評価に従って見通しなしとされていた諸課題が解決されたのは、つい最近のことだ。公開鍵方式の有効な暗号の創出、あるいは盗聴者に対していかなる情

報も与えないデータ伝送の組織化に期待することなど、どうすればできただろうか? 今 から少し前まで、そんな結果は神秘のように思われていた。

対話型プロトコル 例えば神託者 [oracle] と計算者の間の相互作用を検討し、あれこれ の**ゲームの規則**を定めることにより、様々な目的を達成することが可能になる。それはか なり予想外の目的であることもある。その一例を挙げよう」。

神託者 \mathcal{O} はグラフ G_0 と G_1 の同型 φ を知っている。しかし、彼が計算者 \mathcal{V} に 対して送るのは、グラフ $H = \psi(G_0)$ または $H = \psi(G_1)$ である。ここで ψ は φ と は等しくない、ある別の同型である。uは oに対してコインを投げ、uとない、 たは $H \sim G$, のうちいずれかの同型を送るよう要求する。 \mathcal{O} は第 1 の場合は ψ を、第 2 の 場合は $\varphi \cdot \psi^{-1}$ を送る。このような対局が N 回行われる。



 φ が実際に $G_0 \sim G_1$ の同型である場合には、すべての検証は合格となる。 φ が はったりである場合には、たとえ1回の検証でも「偽物」を検出する確率は 2^{-N} である。それは, ${\cal V}$ が ${\it H}{\sim}{\it G}_{\!\scriptscriptstyle 1}$ を要求しているのに対し, ${\it H}=\psi({\it G}_{\!\scriptscriptstyle 0})$ であるとき の検証である。この場合には、誤謬の確率は、課題の次元とは無関係に、Nの 選択によっていくらでも小さくすることができる。

これは、物事の配置の単純さと効果のユニークさとのコントラストの点で際立ったトリ ックだ。**神託者**は,同型arphiそのものについて結局一言も言うことなく,**計算者**に $G_0\sim G_1$ を 納得させた。**神託者**は,同型 φ を知っていることを**計算者**に対して証明したが,しかし「敵 方」がφについて何かを知ることを可能とするようないかなる情報も通信路上で送らなか った。それゆえ, φ をパスワードとした場合には,対話を公然と行うことさえ可能となる。 これは零知識システムの一例であり、暗号学における革命的な一歩となっている。

RSA 暗号 2) あらゆる暗号化はテキストxのy = f(x)への何らかの変換fである。公開鍵 **暗号方式**においては、暗号化は関数 f がみんなに知られている場合を含め、公然と行われ る。復号化とは、要するに逆変換 $x = f^{-1}(y)$ のことだ。もちろん、関数 f^{-1} は膨大な計算量 によって敵にとって歯が立たないことがある。しかしその場合には、送信先にとってもメ ッセージ v を解読することは手に負えなくなる。常識はそうささやく。にもかかわらず、 RSA 暗号方式は「自明なこと」を覆す。RSA の土台にある着想は天才的なまでに単純だ。

¹⁾ Boss V. 『数学講義 第 10 巻:数え上げと効率的アルゴリズム』(モスクワ, URSS, 2008) を参照のこと。本書には RSA 暗号の隠された真実が述べられている。

²⁾ RSA 暗号モジュールは MS Windows その他何百ものプログラム製品で使用されている。RSA Data Security 社は 1982 年に設立された。10 億米ドル単位で計算される年間純利益が、同社の事 業規模を物語っている。







アナトリー・フォメンコによる線描画 [Anatoly Fomenko (1945~) はロシアの数学者]

数字によるテキストxは、容易に計算できる関数3)

 $f(x) = x^e \pmod{N}$

を用いて暗号化される。ここで数字 e と N は 公開鍵 を構成している数字で,誰でもアクセスできる。 $\{e,N\}$ に対して特定の要件が与えられている場合,関数 f は可逆であるが,しかし逆関数 f^{-1} を計算するのはもはや簡単ではない。もっと正確に言えば,それなしには解読が事実上不可能となる秘密が知られていれば, f^{-1} の値は容易に決定される。今述べたことは簡単には信じられない。なぜなら,メッセージ y=f(x) を解読するために必要なのは方程式

$$x^e = y \pmod{N} \tag{*}$$

を解くことだけだからだ。ただし、そこでは手ごわい敵に遭遇することになる。

ここでは**オイラーの関数** $\varphi(N)$ が本質的な役割を果たしている。この関数はN と互いに素な自然数n<N の個数と等しく,N の素因数分解が知られていれば容易に計算することができる。**オイラーの定理**により,N と互いに素な任意の自然数x について

$$x^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$$

である。

普通, RSA ではN=pq と置かれる。ここでp とq は相異なる素数であり、指数e は $\varphi(N)$ と 互いに素である数が選ばれる。この場合、(*) の解は単一で、公式

$$x \equiv y^d \pmod{N}$$

によって決定される。ここで自然数 $d < \varphi(N)$ は条件

$$de = 1(\operatorname{mod}\varphi(N)) \tag{**}$$

から一意的に導き出される。

a(mod N) という記法は a を N で割った余りを意味する。

話はまさしくこれで終わりだ。最初は奇妙な印象が生じる。d の秘密は公然の秘密のように見える。N を素因数に分解し,次に $\varphi(N)$ を計算して(**)を解き,d を導出することを,いったい何が妨げるのだ? 言い換えると,公開鍵 $\{e,N\}$ はd の秘密に関する完全な情報を含んでいるのである。しかし,手品はまさにここにある。d の計算の他ならぬ第一歩はN を素因数に分解する必要性に突き当たる。N が大きい場合,それは今のところまったく手に負えない課題であることが判明する。

付 録*

1. 催眠術と数学

催眠術にかかりやすい人間であればあるほど、彼に数学を与えるのは一層難しくなる。 その原因は次のことにある。

エリクソン¹⁾ の3重らせん(互いに対して差し込まれている3つのストーリー)は、あらゆる人間を催眠トランス状態に追い込む。これはおとぎ話ではなく、ハンマーのように単純で、刑罰に処せられるべき「25番目のコマ [twenty-fifth frame、サブリミナルメッセージのこと]」のように効果的な心理学的手法なのである。数学ではそれと似た何かがひとりでに生じる。その結果、あれこれの議論を最後まで聞き終えるよりもはるか前に、多くの人はトランス状態に陥ってしまう。トランスは感覚や気分の知覚にとっては結構なものだが、論理の連鎖にとってはそうではない。

エリクソンのらせんは巧妙で、しかもきわめて単純なトリックである。催眠者はあるストーリーを物語り、その途中で話を突然中断し、次のストーリーを語り始める。そのストーリーもやはり最後まで進まず、語りは第3のストーリーに転換する。意識はそれらすべての中途半端なストーリーを記憶に留めることを余儀なくされる。すると意識は「手一杯状態」になる。心のガードが取り払われ、潜在意識への道はフリー状態になり、聞き手はトランス状態に入る。

数学の教科書においては、エリクソンのらせんは地平線の彼方まで続いている。最も単純な実例を挙げてみよう。

「任意の $\varepsilon > 0$ *について、

 $|x-a| < \delta^{\star\star}$ to bit, $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

となるような $\delta>0$ を指定することが可能な場合には、関数 f(x) は点 x=a において連続である。」 — このセンテンスの*では、関数のことは忘れ去られており、 ε が天下り式に登場している。その ε に関して、今はまだ明確ではないのだが、後でストーリーの結末を理解するためには、それが $\varepsilon>0$ であることを記憶に留める必要がある。**では、さらにもう1人の「登場人物」が頭の中に突如侵入してくる。

^{*} この付録は、筆者の様々な発表物からの抜粋によって構成されている。それらの発表物には次の教程が含まれている。Boss V. 『数学講義』、第 1 巻:解析学; 第 2 巻:微分方程式; 第 3 巻:線形幾何学; 第 4 巻:確率・情報・統計; 第 5 巻:関数解析学; 第 6 巻:ディオファントスからチューリングまで; 第 7 巻:最適化; 第 8 巻:群論; 第 9 巻:複素変数関数論; 第 10 巻:数え上げと効率的アルゴリズム; 第 11 巻:数理物理学の方程式; 第 12 巻:反例とパラドックス; 第 13 巻:トポロジー; 第 14 巻:数論; 第 15 巻:非線形演算子と不動点; 第 16 巻:集合論:カントールからコーエンまで,モスクワ, URSS, 2005~2011。

¹⁾ エリクソン [Milton Erickson] は催眠療法を専門とするアメリカの精神科医。

すべてのストーリーはあっと言う間に終わっている。しかしスイッチが切れた意識はもはや何も聞いていない。潜在意識は聞いているが、何も理解していない。しかもこれは、たった数行からなる定義において生じていることなのだ。そこではずたずたに引き裂かれた推論の断片がとぎれなくかつ同時並行的に、まるでマトリョーシカのように互いに対して差し込まれている証明から、いったい何を汲み取ることができるのか?ここにはさらに、あたり一帯を灰燼に帰すような、教科書の説明の冗漫さ²⁾を付け加えることができる。その結果、鳥瞰的な視点から眺めてみても、無知蒙昧の闇の中から眺めてみても、全体を捉えることはできなくなる。

おかしなことになる。利用し得る「武器庫」の蓄えはあり余るほどあるにもかかわらず、各人は、研究対象に関する明瞭な理解の形成という課題にたった一人で取り組み続ける。 細かな点が理解できなくて動揺する。 あることは棒暗記したが、 あることは分からない。 その後、多くの人はそれを理解するため、老人になるまで努力し続けることになる。 だが、 あの世で「演奏会を開く」ことに、どんな意味があるのか? 催眠術の霧を突破した方がいい、 今すぐに。

2. 混合戦略

数学は**万人**に多大の利益をもたらすが、それは**個々人**に対してではない。時折、そんな ふうに思われてならないことがある。それには根拠がないわけではない。しかし、それと は別の性質を持った例を挙げてみよう。

損失発生の可能性がある株式にはどんなメリットがあるか

有価証券市場に S_1 と S_2 の2つのタイプの株式が存在していると仮定しよう。それらの収益率は何らかの予測困難な事象(関税法の採択、戦争、等々)に依存している。株式 S_1 は8%または2%の収益、そのとき株式 S_2 はそれぞれ-4%または+14%の収益を与える。この状況は行列

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

の形でコンパクトに書き表すと都合がいい。買い手は列, すなわちいずれの株式を購入するかを選択する。行は事前には知られていない諸事情によって決定される。

株式 S_2 の買い手はリスクを負っている(S_2 は損失発生の可能性がある)。しかし、他方の S_1 の保証収益率はわずかに 2%である。それにもかかわらず、このような状況から 5%の

²⁾ ちなみに、その冗漫さは、「簡潔さこそは知恵の精髄だが、報酬にとっては敵だ」からというより、むしろそれ以外の原因に起因している。[「簡潔さこそは……敵だ」は、「執筆した原稿の量に従って報酬を受け取る執筆者にとっては、語数の多い冗漫な文章の方が金が儲かる」という意味。「それ以外の原因」は、「物事を要領よく簡潔に表現できない執筆者の頭の悪さ」を示唆しているように思われる。]

収益が簡単に「搾り出される」のだ(!)。実際、株式 S_1 、 S_2 をそれぞれ x_1 株、 x_2 株買ったとすると、利益は

$$d_1 = \frac{1}{x_1 + x_2} (8x_1 - 4x_2)\%$$

または
$$d_2 = \frac{1}{x_1 + x_2} (2x_1 + 14x_2)$$
%

となる。

保証収益 $\min\{d_1,d_2\}$ を目標として設定した場合,その収益の最大値は等式 $d_1=d_2$ によって確保される。これより $x_1:x_2=3:1$ が導き出される。この場合,諸事情の如何に関わりなく,

$$\min\{d_1, d_2\} = 5\%$$

となる。損失発生の潜在的可能性がある株式の購入は、保証収益を 2%から 5%に引き上げる。

仮説上の「ロシアンルーレット」は2丁のピストル S_1 , S_2 のうち1丁からこめかみに弾が発射されることを想定している。不発の確率は行列

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

によって決定されるものとしよう。ピストルの選択に相当するのは列の選択であり、行は 技術的な諸事情を特徴づけている。**いずれのピストルを選択するべきか?**

もちろん,この課題は前の課題と類似しているが,ここには「問いの価値」の上昇に関連した新たなモチーフと新たなフィーリングがある。その原理的な契機は一回性だ。実は,前の課題において資金が1株の購入分しかなかったとしたら,同じ問題が生じたはずだ。

この課題の解は、行列を解析した後でいずれのピストルを選ぶ必要があるかという単純な予想の枠外にある。この場合における不発の確率の最大値は、確率2/3でのピストル S_1 および確率1/3でのピストル S_2 のランダムな選択によってもたらされる。

言い換えると、事前に「コインを投げる」必要がある。その計算方法は前の課題の場合と異ならない。選択の確率 p_1 、 p_2 は方程式系

$$8p_1 = 2p_1 + 12p_2$$
, $p_1 + p_2 = 1$

によって決定される。

これらの例は類例のないものとして注目に値する。なぜなら、統計的平均的な世界観は そのような現象の脇を通り過ぎてしまうからだ。すべては単純で広く分布している現象な のに、どうしたわけか「盲点」の領域に陥っている。これらの課題は明らかに最適化に関 する課題だ。しかし、それらの本性は予想外でなじみのないものであり、しかも暴露され ることに抵抗しようとする傾向を持っている。まさにそれゆえに、この場合には、共通性 が多様な色調を平準化させている抽象的理論より、単純で鮮明な例証のほうが効果的なの だ。

確率過程の隠蔽性が、不可解な出来事に対する人間の恐怖心と相まって、株取引ゲームを神秘の霧で覆い隠している。株取引のプロが顧客の頭を朦朧とさせる傾向を持っていることもまた、それに対して独自の寄与をしている。損失発生の可能性がある株式の買い推奨に対しては、顧客は催眠術にかけられた状態でコンサルタント料を払っているのだという、ナンセンスな解釈が与えられる³⁾。

ところで、事の本質は十分に単純ではあるが、しかし最適化に関する普通の課題ほどトリビアルではない。現実には、取引市場におけるプレイヤーは、マンモス狩りによって形成された人間のメンタリティーがそれに対して対応する準備ができていない、様々な状況に遭遇する。

人間は既に確率的戦略という考え方に慣れ親しんでいる。しかし原理的には、それは周囲を 取り巻く現実の理解における革命的一歩、ブレイクスルーなのであって、これが新たな可能性 の発見をもたらしつつある。

3. 保険業

顧客が価額Xの財産に保険をかけるとする。保険料をpX,財産喪失の確率をpとする。 喪失価額の数学的期待値(平均値)はpXである。それゆえ,保険会社は条件pX > pX が満たされるとき,すなわちpy > p である場合にのみ「黒字」になる。**平均値**を利用するのは論理的だ。なぜなら保険会社は多数の顧客を相手にしており,したがって全体的な描像は大数の法則の作用によって決定されるからだ。そうでないとしたら,数学的期待値に依拠するのは疑わしくなる。

個々の顧客にとっては、描像はそれとはまったく異なる。ある状況が大量に発生するということは顧客には無関係だ。天は「自分のコイン」を1回しか投げないのだから、平均すべきものは存在しない。

これは客観的現実が持つ諸矛盾の一つである。軍隊の運命は兵士の個々の人生行路についてほとんど何も語らない。数学的期待値は個別の結果を保証せず、平均値における勝利は時として確実な敗北と同義となる。それゆえ、そのような類の状況においては、数学的期待値の最適化は現実の諸要求からは程遠いところにある。課題の適切な設定は、問題の内実についての深い理解にもとづいて初めて可能となる。その結果として、例えば、最初の記述の範囲を超えたところにある諸要因によって決定される、あれこれの確率の最適化が得られるかもしれない。

³⁾ 損失発生の可能性がある株式を買うことの合理性に関する話は、どんな場合にも、全部が真理というわけではない。その買いが合目的的なのは、いかに小さい確率であれ、収益に対する期待が存在する場合に限られる。具体的な売買の際には諸事情を天秤にかける必要がある。

「保険が保険会社にとって得になるのなら、それは顧客にとっては損になる」という袋小路からの脱出策が、まるで数学の長大な公式に依拠したある種の秘密のように、うやうやしく叙述されていることが稀ではない。実は、顧客にとってあり得る保険の合目的性は、通常、きわめて単純な判断に依拠している。それは、付保財産の主観的価値はその市場価格Xよりもはるかに高いという判断だ。

極端なケースを取り上げよう。自動車保険の話だ。持ち主の観点から見たその車の主観的価値は、次のような意味で無限大になり得る。別の車を買う金がない場合、自動車の喪失は失業、愛する彼女の愛想尽かし、等々に直結する可能性がある。このように、「その場合」には、顧客は命にかかわるほど重要な支点を失うことになる。それゆえ、顧客にとってはあらゆる保険料 γX が合目的的なのである。

まさにこのこと、すなわち価値と市場価格の間の不一致にこそ、この問題の本質は潜んでいる。例えば、頭痛以外の何ものをも与えてくれない固定資産があるものだ。でも売るのは惜しいし、ちっとは役に立たないこともない。この場合、価値は価格より小さく、保険をかけるのは不合理だ。

4. 集合上のパラドックス

物事は全部が全部, そう見えるほど単純というわけではないのだということを思い起こさせる, いくつかの事実を紹介しよう。

カントール集合

有限な範囲[0,1]に押し込まれた無限大はアノマリーのスパークを散らしている。その典型的な病理は、線分[0,1]から3分の1ずつを順次取り除くことによって得られるカントール集合に見られる。まず最初に[0,1]を3等分し、真ん中の部分を取り除く。残った各部分について、それと同じ操作を無限に繰り返す。その極限において、[0,1]からは何も残らない。これはカントール集合 C と呼ばれている。取り除かれたそれぞれの「3分の1」の長さは

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$$

である。すなわち,[0,1]の「全長」が取り除かれる。ところが,「やせ細った」集合 C は**連続体と対等である** 4 ことが判明する。これがサプライズの主要部分をなしている。

これらすべてのことはかなりよく知られているが、しかしいくつかの重要なディテールが視野の外に取り残されている。これは、そこでは情報の大部分が意識されないまま流れてゆく現代の生活リズムに起因している。それと同時に、カントール集合は、関数論の観点から見て興

⁴⁾ 複数の集合の元の間で互いに一意的な対応づけをすることが可能ならば、それらの集合は**対等**である。一般に線分[0,1] は**連続体**とみなされている。

味深い多数の事例の構築における基礎をなしている。それゆえ、普通なら聞き流してしまうようないくつかの特殊な問題についてやや詳しく論じることには意味がある。

直観的には、集合 C をなしているのは取り除かれた各区間の端であるように思われる。しかし、「そうではない」。もしそうなら、C は可算集合であるはずだ。しかし C は可算ではない。なぜなら、C は $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ (ここで a_k は値 0 または 2 を取る)の形の数、すなわちそれを 3 進法で表したとき、1 が出てこないような数から成り立っているからである。数列 a_1,a_2,\cdots 、(ここで a_k は (2 進法の場合と同様に) 2 つの相異なる値を取ることができる)の個数は非可算個である 5 。 C における取り除かれた端は**第1種**の点、それ以外の端は**第2種**の点と呼ばれる。

長さの測定という観点から見たとき、今検討したシナリオには興味深い点がある。 a_n を非可算数の数列とする。[0,1] を a_1 個の部分に分割し、中央部分を取り除く。第2段階では残った部分のそれぞれを a_2 個の部分に分割し、再び中央部分を取り除く。これを無限回繰り返す。極限においては、カントール集合のある種のアナロジー C_a が得られる。その測度は無限積

$$l(C_a) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_j}\right)$$

によって決定され,[0,1) の範囲内における任意の数列 $\{a_n\}$ を選択することによって作ることができる。それと同時に,C と同様, C_a は 1 個の内点も持っていない。こうして,長さの測定という問題はもはや初歩的な問題には見えなくなる。

カントールの階段

カントール集合は数多くのアノマリーの構築の源泉となっている。例えば、関数 $f:[0,1] \to [0,1]$ は(カントール集合の構築プロセスにおいて)取り去られる各区間の**閉包**において、その区間の中央と等しい値を取る。第2種の点における f(x) の連続性に関する追加定義 は連続単調関数 f(x) を与える。この関数の導関数はほとんどいたるところでゼロに等しいにもかかわらず、f(0)=0、f(1)=1となる。言い換えると、f(x) は[0,1] のほとんどどこにおいても増加せず、しかし測度ゼロの集合上においては顕著に増加することができる 7 。

⁵⁾ ここでは人生の裏表(特に裏)を知り尽くした読者を当てにして、この話については大雑把に語るだけにする。

⁶ 第2種の点において \tilde{x} は $f(\tilde{x}) = \lim f(x_k)$ とされる。ここで $x_k \to \tilde{x}$ であり、すべての x_k は第1種の点である。

 $^{^{7)}}$ その結果 $\int_{0}^{1} f'(x)dx = 0$ となるが、しかし $\int_{0}^{1} f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$ とはならない。

5. 教育原理は宇宙の構造と調和しているか?

任意の聴衆はA, B, Cの3つのカテゴリーに分類される。第1の人々は即座に理解し、第2の人々は聞いたことに別の解釈を与え、第3の人々はどんなに説明しても何も理解できない。

すべてのカテゴリーの人々は世界文明にとって等しく価値があるということを,あらかじめ断っておく必要がある。これは偽善的に人道的立場を装っているわけではなく,事の本質にもとづいた理由による。なぜなら,例えば地震が起きたとき,あるいは危険を冒して何かをしようとするときの諸条件の下では,彼らはまったく別の側面を見せるからだ。天才的ソリューションが C 群の内部でより高い頻度で誕生していることは言うまでもない。例えば,リーボック社のあっと驚く手品のようなタイプのソリューション: ジョギングシューズの左足側はタイで,右足側は台湾で生産する。盗みにくくするため。

しかし、今はそれとは別の話をしよう。C 群は理解できていないし、今後も理解できないにもかかわらず、教育システムはその状態に甘んじたがらない。その結果、学習プロセスはうんざりするほど停滞する。立ち止まっていてはならない。C はいまだに理解できていないが、A と B はもう既に理解し終えているのだから、それは当然のことだ。C が (a-b)(a+b) の括弧の開き方を理解するまで半年待っている間に、A と B はうんざりして頭がおかしくなってしまう。それは、[我が国の教育水準の低下を目的とした敵国による] 惑星規模の破壊工作が行われているのではないかという疑念を起こさせる。

現状の打開策はトリビアルなものなのではないかと思える。それはつまり、簡潔かつ単純な説明の仕方をする必要があるということだ。その際にはA群とB群に目標を定める。それはC群にとって今までより悪いことにはならない。かえって良くなりさえする。学習プロセスが自然な流路に立ち戻るからだ。アクセントの置き方、全体の釣り合い、イントネーションが正常化する。その本質を理解することなしに、我々が接している自然現象がいかなるものであるかを知ることはできない。論理だけでなく、雰囲気、音楽、遊びも知恵の発芽をもたらしてくれ

^{【駅注】} この付録は著者の別の著書からの抜粋なので、残念ながら「この先の方の話」を読むことはできない。

る。教育における不合理な種子は、ニュートンの2項定理よりも効率的に実りをもたらす。それゆえ、魂をゆがませることなしに教え、学ぶ必要があることには、いかなる疑いもない。

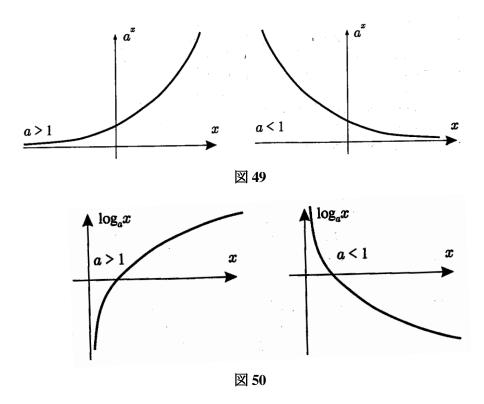
ところが、問題は予想外の障壁に行き当たる。授業では何を取り上げるべきか? 学校の代数全体について述べるには数時間を要する。ある面から見ると、総授業時数を削減してはならないことは明らかだ。言わば、孵化の過程が必要なのだ。9 か月余りの妊娠期間というあまりにも月並みな例が、ここではぴったりだ。分数やサインを学ぶのに 10 年は必要ないが、成熟のためにはそれぐらいのオーダーの時間が不可欠なのである。

教え直しのために大量の時間が費やされる。例えば、迅速な理解というものは、実際には見かけほど素晴らしいものではない。「迅速」は必ずしも「正確」とは限らないことが判明する。しかも、迅速な理解は風化する。それゆえ、即座の理解はプロセスの完了を意味しない。*B* 群においては事態はさらに悪い。理解はより強固に身についているが、その意味づけのし直しは誤謬なしには行われず、錯誤を固く凝結させる。そのため、最初から何度も説明し直さなければならなくなる。

同じ話の際限のない繰り返しが得られる。この段階では*C*群はもう考慮に入れられなくなっているが,しかし説明の必要性は,まあ増大したと言えそうだ。ただし,この段階での説明は今までとはまったく別のものだ。それは割り当てられた授業時間を埋めるための説明ではなく,結果を得るための説明なのである。論理的には,すべては今までと同様に無駄なことの繰り返しのようなものだが,しかし穏やかな修正作用の下で知識は成長し,しっかりしたものになる。

学校ではまさにそんなことが実現されているのだと誰かが思っているとしたら、それは間違いだ。もちろん、言葉の上ではそれが実現しているように見えるが、家庭教師による授業の結果にもとづいて判断すると、学校での授業とそれとの間には大きな違いがあることが容易に分かる。それぞれの授業に伴う自明な付随的諸条件を捨象した上で考えると、学校外での授業の成功の理由はきわめて単純に説明することができる。その授業のプロセスは「ある者は教えているふりをし、ある者は学んでいるふりをする」というバーチャルな袋小路から抜け出て、正常なレールに乗っている。そこでの説明、課題の解決、評価や所見――これらすべては結果の達成という唯一の目的に従ってなされている。それゆえ、「説明」は、学校と学校外とで言葉は同じだが、後者においてはその本質を変える。「どこへともなく」式の無方向性は消滅し、説明は単純かつ具体的なツールに転化する。学習者に緊張を強いない。全体をざっと見渡す。範囲外の事項を説明するためにわずか5分、10分の間も逸脱することなく、最大限の効果を即座に達成する、といった類の目標を追わない。最も肝要な点の説明を特に重視し、細部を不正確に理解するかもしれない可能性は放っておく。一回一回、その都度元に戻って説明する。ただしその際はアレンジの仕方を変

え、単純明快な、軽薄ですらあるような形式で説明する。——このような説明方法は、教育省が是認するような方法とは若干異なっている。しかし、これこそが結果を与えるのだ!



話が枝葉末節にわたりすぎて、結果としては何も得るところがないと思われないようにする ために、例として、対数をざっと眺めてみるとどんなふうになるか検討してみよう。

指数関数 $y = a^x$ のグラフを図 49 に示す。

 $y = a^x$ であるような数 $x = \log_a y$ を, a を底とする数 y の対数という。別の言い方をすると

$$a^{\log_a y} = y$$

であり、これを対数の基本等式という。

言い換えると、 $y = a^x \ge x = \log_a y$ は互いに逆関数の関係、すなわち

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

の関係にある。

一見したところ両者は完全に同等のように見えるが、もちろん、対数のほうが理解しにくい。 ハミガキをチューブに戻すより、そこから押し出す方が簡単なのと同様、ここでは a^x を相手に するほうが簡単だ。 $x=\log_a y$ と書く代わりに、普通は文字xとyを入れ替えて $y=\log_a x$ と書かなければならないことによって、状況は面倒なことになる。なぜなら、礼儀作法がxは引数のために、yは関数のために用いることを要求しているからだ。もしそんな礼儀作法がなかっ

たならば、対数のグラフでさえ新たに書く必要はないはずだ。そのグラフは既に図 49 において、非標準的な座標軸の配置を用いて $x = \log_a y$ という表し方で描かれているからだ。

文字xとyを入れ替え、座標軸を普通の配置に持って行った場合 (90°回転プラス垂直軸に対する鏡映対称)には、対数のグラフは図 50 に示したようになる。

このように、対数のグラフと指数関数のグラフは、回転と鏡映対称も含め、正確に同一の曲線である。

それらの関数の性質についても同じことが言える。対数の性質とは、別の言語で表現された 指数関数の性質なのだ。例えば、

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

とは $a^{\beta}a^{\gamma} = a^{\beta+\gamma}$ に他ならず、

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

は $(a^{\beta})^{\gamma} = a^{\beta\gamma}$ の別の書き表し方だ。

ハミガキをチューブに戻すのはそう簡単なことではないのだから,これらの基本的規則は, より難しい与え方をされていることになる。

最後に、c を底として $a^{\log_a b} = b$ の対数を取ると $\log_a b \log_c a = \log_c b$ が得られ、これより

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

となる。これは**底の変換公式**と呼ばれる。

以上,きわめて簡潔な説明だが,それは数学便覧の文体におけるような簡潔さではない。 きわめて重要なのは、そこに人間的なイントネーションが存在するということだ。もちろん、現場におけるフィードバックが表現の色合いをより適切なものに修正することになるが、ディテールに立ち入ることを差し控えるという姿勢がライトモチーフであり続ける。 説明における必要以上の追加的な強調は細部においては利益をもたらすが、全体的には損失をもたらす。なぜなら、そこでは、軽い調子で語ったちょっとしたコメントが学習者にとっては重いおもりになるからだ。気づきの促しは目覚めさせ、講釈は眠らせる。

筆者の主張に対する教育当局からの批判的指摘は容易に予想できる。いわく、断片的だ、性 急すぎる、熟慮が足りない。誰にも理解できない。しかもテーマが十分に展開されていない。 それにそもそも、これは説明ではなくて宣言だ。

最後の指摘は根本問題に突き当たって火花を発している。教育については二通りの見方をすることができる。教育とは既成の処方箋の学習者への注入であるという見方、もうつは、学習者独自の処方箋の探究・構築方法の手ほどきであるという見方だ。自ら考え抜いて得たものによって埋めるべき余白が説明の中に存在しないとき、その説明は学習者の関心をそそらず、「まずくて食えない」ものになる。小話が言い残しなしに語られたとき、

その面白みがしぼんでしまうのと同様、数学的推論は退屈なコメントやお追従めいた言葉の重圧の下で生気を失う。すべてが完全に明確な形で与えられたとき、知恵が働くべき余地はなくなる。「退屈な人間だと思われたいのなら、すべてを語り尽くせ」というヴォルテールの評言には、こう付け加えることができる。――どうしても理解させたくないのなら、もっと詳しく説明せよ。

対数の話に戻り、こう自問してみよう。最初の学習の場合、そのような説明は役に立つのか? 生じるかもしれない上司の憤激は容易に想像できる。 ——5 分間、生徒たちはぽかんとしたま まだ。誰も何も理解していない! とんでもないことだ!

これを別の面から見ると、そのどこがいけないのか? 例えば、相手が圧延工場の専門作業員の場合なら、情報を 1 時間につき小さじ 1 杯分ずつ詰め込む方法で養成することが可能だ。順序を逆にして、終わりの方から始めることだってできる。 —— はい、これが、皆さんが入社された場合に受け持っていただく圧延機です。ガラガラ不快な音をとどろかせていますが、その代わり、我が社の製品は大きな需要があります。給料は高くはありませんが、社員の中には美人の女の子がいっぱいいます。 —— 誰も何も理解しなかったが、製造プロセスはそれでもちゃんとスタートした。誰かは工場の規模が気に入ったのかもしれないし、別の誰かは女の子が気に入ったのかもしれない。工場見学の印象が気に入って入社した者にとっては、訓練のつらさを克服するのはより容易となる。

もっと幅広い視点から眺めて見ると、認識のプロセスはほとんど常に終わりの方から始まる。 ところが一般には、数学においてはまだ理解できないものは興味を引き起こさないと考えられ ているため、数学の認識プロセスはそれには含まれないとされる。いわく、そこに隠されてい るものがはっきり見えていないのだとしたら、いったいどうすれば読んだり聞いたりすること ができるのか?と。 一般的に言えば、それは時によりけりだ。問題のすべては釣り合いのう ちにある。人生におけるすべてが分かっているわけではないのに、我々は生きている。全然分 からない音楽なのに、我々は耳を傾ける。

6. エルブルース山の頂上ではうっとりする, そこに住まないうちは*

クラスノセリスキーのことを思い出すと快い気分になる。昔に戻ってあの頃と同じ感情にひたるのが快いのだ。彼と一緒にいるときはいつも心地よかった。心が落ち着き、楽しかった。トランプをしたり、数学、あるいはもっと有益な何かについておしゃべりしたりしていると、ひとりでにエネルギーが満たされてくる。エネルギーが流れてくる源——そ

^{*} 数学者、そして人間マルク・アレクサンドロヴィッチ・クラスノセリスキーの思い出より。 [Mark Alexandrovich Krasnosel'skii(クラスノセルスキーとも表記)(1920~1997)はソ連・ロシアの数学者で、非線形関数解析に関する現代的アプローチの創始者の一人として知られている。1968~1990年、ソ連科学アカデミー制御問題研究所で研究・教育活動に従事。本書の著者は同研究所の同僚としてクラスノセリスキーと親交があった。]

れは攻撃的な激しい噴水ではなく、穏やかな、人をまどろませるようなとさえ言える、しかし海のような秘められた力を持った深淵だった。まるで別世界に入り込んだようだ。緊張が消えうせ、人生の力点の置き所が変わる。すると毎回、何のために彼を訪れたのかを忘れてしまう。何の目的もなく訪れたという結果になる。にもかかわらず、そのことがかえって嬉しく感じられるのだ。彼といるときの心のやわらぎとは、そんなものだった。人と人の交わりの奥に潜んでいる神秘にヴェールをかけるものがトポロジーであろうと、チェス盤であろうと、そこにいかなる違いがあろうか?



クラスノセリスキー, 1920~1997

あなたは、あなたが現われたことを喜ぶ人間に出会ったことがおありだろうか? 確率は低い。きわめて稀な現象。100年に1度、100万人に1人。そんな人間を探し出せるという確信を失った多くの人々は、自分のために犬を買う。何の話をしているか、お分かりですね? ところが彼は、あらゆる人間の出現を喜んだ。あり得ないって? でも事実だ。それゆえ、制御問題研究所の人々は彼のところに怒涛のように押しかけた。言うなれば、精神的リハビリ治療を受けるために。このたった一つのことを讃えるためにだけでも、彼の銅像が建てられるべきだ。もちろん、彼のリハビリ治療が無駄骨に終わった相手も何人かはいる。まあそれは、リハビリの結果、一部の連中は自分のこと

を偉大な数学者だと感じてしまったという意味においてだ。もっとも, どっちの病気の方がいいかなんて, 誰も知らないのだが。

それに加えて、クラスノセリスキーが実に見事な講義を行い、聴衆を興奮させ、インスピレーションを与える能力を持っていたという事実を知れば、生活の様々な場面において、彼がいかに大きな重荷を背負っていたか分かるだろう。私が何の話をしているのか、おそらくどなたにも理解していただけるものと思う。例えば、傑出した学者になるためには、何が必要なのだろうか? そのためには多くのものが必要だが、何よりもまず不可欠なのは、歪んだ顔つき、きーきー声、そして何かよからぬ病気、一番いいのは不治の病だ。そんな人間を何としてでも支えてやりたいと、あなたは感じるだろうか? さて今度は、実に沢山のことをこなす能力を備えているだけでなく、さらに高度に学問的な何かを狙っている、魅力的な男を想像していただきたい(クラスノセリスキーを知っている人には、その想像は不要だが)。そりゃ何だか、あまりにも恵まれすぎではないか? だがそれは、ただ単なる宇宙の不公平さにすぎない。自明のことだが、あなたも私も高い学問的野心など持っていないので、そんな不公平さには容易に甘んじることができる。そんなものは我々には無縁だ。しかし、もし誰かが、適切な方向性を持った野心に憑りつかれていたとしたら? その野心の慢性的亢進期にある哀れな彼のために、何をなすべきか? 何しろ、彼には先ほど挙げた一連の特徴、つまり列の先頭にいる者のデータのすべてが出そろっているというの

に、ちょうどそこへ色つやのいい挑発的なほど魅力的な誰かが現われて、先頭の位置を得ようとしきりに機をうかがっているのだ。

どうか、私がごく身近な人々の話をしているとは考えないでいただきたい。そこには、野心があったとしても、完全に調和した階層的に整序された相互関係しかなかった。教師は光を当て、弟子たちは光を浴びていた。ところで、その光を当てる方法はきわめて繊細で捉え難く、唯物的な眼差しをもってしてはそれを明らかにすることはできない。老いたスルタンと若い妻の間で何も起こらなかった、召使いの光の当て方が悪かったからだという、例の寓話を思い出していただきたい。老人は腹を立て、自らロウソクを手に取り、召使いを自分の位置につかせた。召使いはちゃんとできた。「分かったか、この馬鹿者め、どうやって光を当てなければならないか」とスルタンは怒鳴った。この寓話を聞いた後には、科学への道に光を当てている科学界の指導者たちの健康を祈って乾杯をするのが通例になっている。事の本質を理解しないまま、ときには冗談で、ときには本気で杯を乾す。光を当てる能力を持っているのは、実はロウソクであるにもかかわらず。

余談ながら、私は今、信じられないほど生産的なある研究者2人組のことを思い出している。 彼と彼女を仮にシューシャ、ニューシャと呼ぶことにしよう。シューシャはきわめて高度な専門的知識を備え、呑み込みが速く、独創性に富んだ男だ。ニューシャは好感の持てる、しかしどこか謎めいていて、とらえどころのない女だ。彼らはデュエットを組んで、まるでパイを焼くように、なかなかいい論文を次から次に発表していた。傍目にはそう見えた。シューシャ本人はと言えば、「何から何まで」全部自分でやっている、あっちの方、つまりあのごくつぶし女は論文に署名してるだけだと、何度も私に語ったことがある。割り切った見方をすれば、それは実際にそうだった公算が大きいのかもしれない。その後、2人組は解散した。それから2年後、私はシューシャと出会った。「どうした、論文、発表するのやめたのかい?」答えは簡単だった。「何をやるべきか分からないんだ、アイディアが湧いてこないんだ。」 まさにそうなのだ。だから、彼女が彼にアイディアを授けていたのだと、もしあなたがお考えなら、もう一度考え直していただきたい。シューシャはまさに、自分でアイディアを生み出していたのだ――明るかった頃には。

それゆえ、天上界では誰がどんな地位を占めているかということに話題が及んだ場合には、私は確定的なことを語るのを避けることにしている。なぜなら、最も重要なものは背後に隠れているからだ。そもそも、私は数学に対するクラスノセリスキーの貢献について判断を下す立場にない。私にはそんな資格はないし、しかもそれはそれほど重要なことではない。それほど重要なことではないというのは、「貢献」の実質的な部分はそれ自体自明なことであり、一方、非実質的な部分は賞賛の声とは無関係に、今後、歴史的に描き出されていくことになるという意味においてである。私がクラスノセリスキーという「現象」の一目撃者として、その核心として人々に伝えることのできる、そして伝える義務さえ負っているのは、次のことだ。もちろん、重要な点を捉えるのはそんなに容易なことではな

い。最大の難しさはどこにあるかと言えば、それは、熱いアイロンと冷たいアイロンが同 じように見えるのと同様,普通の人間と傑出した人間は同じように見えるということだ― ―言うまでもなく、凝視しない限りは。しかし凝視するのはけっして容易なことではない。 実際のところ,普通でない人間の特徴として,いったい何を挙げることができるだろうか? 例えば、素晴らしい講演者――結局、そういう人間は少なからずいることが分かる。我々 が相手にしているのは,それとはまったく別の次元のユニークさだ。頭のいい人間もよく いる。魅力的で、親切で、開けっぴろげで、ざっくばらんに他人と交わる人間にもしばし ばではないが、出会うことがある。では、それら以外にさらに何があるだろうか? 多くの 点を付け加えることが可能だが、それらをすべて列挙することは、特徴の表面を上滑りす るだけだ。それに加えて、言語の構造というものは、そのような事柄を表現するためには まったく無力だ。例えば、私は先ほど、クラスノセリスキーは「あらゆる人間の出現を喜 んだ」と書いた。それがあなたに強い印象を与えたかどうか、正直に答えてみていただき たい。いかなる印象も与えなかったのではないかと思う。それはただ単に、その言葉が比 喩として、あるいは空疎な響きとして受け止められるからだ。例えば、私は今、現在滞在 中のオーストラリアでクラスノセリスキーを回想しているのだが,この大陸はまさに,あ らゆる人間との出会いを喜び、あなたが現われるとごく当然のこととして満面の笑みを浮 かべる人々で満ちあふれている。ただし残念ながら、この外面的な光景の背後にあるのは 空虚だ。クラスノセリスキーは本気で喜んでいた。それは通常とはあまりにも異なる、並 外れたと言えるほどの喜び方であり、そのため、そこにある本当の意味は見落とされてし まう。人間には世界の中の何が見えているか? それは、自分が慣れ親しんでいるもの、そ れに対して心の準備ができているものだ。稀有なものは見えてこない。自分が味を試した ことのないものは存在しない。

それゆえ、他の「目撃者」たちが彼について私とはまったく異なる印象、つまり「解釈」を持っている可能性を私は否定しない。ただしそれは、意見の自由が残されている領域では、我々は根源を突きとめることはしないというだけの話だ。一般的な背景をバックとして見たとき、クラスノセリスキーを他と異なった存在にしていたのは、彼のエネルギーのポテンシャルだ。お望みなら、霊気と言ってもいい。

リーダーを他と異なった存在にしているものは何か? 傑出した人間の特徴をなしているものは何か? 能力や手腕か? 原則的にはそのとおり。しかし,それは結果だ。真の原動力は氷山の水中部分,こう言ってよければ超自然的な基礎部分なのである。呼び方は好みに応じて選ぶことができる。例えば,エネルギーのポテンシャル,精神的発達といったように。しかしいずれにせよ,その隠れた非物質的部分は基礎の中に横たわっている。二次的なディテール,すなわち見たり触ったりできるものに注意を集中した場合には,多くのことが非論理的で奇妙な,説明不可能なもののように思われてくる。そしてそれを回避するのはきわめて難しい。ある人間に近づけば近づくほど,彼を外面的・日常的な見かけと同一視する危険性が大きくなる。「預

言者は、自分の故郷では歓迎されないものだ」という言葉を覚えておられるだろうか? それゆえ,近しい人々は最悪の証言者なのだ。弁証法とはまさにそういうものだ。だから,第一印象は無条件に正しい。人間の評価は,近しさが眼差しをさえぎらないうちにしなければならない。さもないと日常的な繰り返しが前面に出てきて,木の向こう側の森はもう見えなくなる。

私はクラスノセリスキーが**制御問題研究所**に初めて現れたときのことを思い出している。所員たちは、まるでエルブルース山の頂上に立ったときのように、ちょっとうっとりした気分になった。何か新しくフレッシュで、光を放つものが研究所にやって来たと、各人は感じた。まず最初に、大胆で向こう見ずな所員たちの細い小川が、その発光体に向かってゆっくりと流れ始めた。それから小川はだんだんと幅を増し、どっと流れ出した。その際、それらの者たちの頭にあったのは、せん妄状態にあるときに思いつくような口実だった。なぜなら最初のうち、彼を訪ねるのにもっともらしい口実は不要だということを誰も知らなかったからだ。そして各人は彼のところへ行くと、人間的な温かみと思いやりの、自分の取り分を見出したのだった。

クラスノセリスキーはゼミナールで光り輝いていた。ちなみにそのとき,彼は自分が努力しているようなそぶりや気取りは一切示さなかった。単純に分かりやすく説明する能力は比類ないものだった。彼はゼミナールの報告者に対してお世辞は言わず,その代わり,報告者が幾晩も寝ずに熟考を重ねたことに言及した。即興のように見えるすべてのものは,何度も何度も考え直した末に生み出されたものなのだと,彼は言っていた。言い換えると,彼は自分自身の天分に関する伝説を支持せず,あらゆる成果の源をたゆまぬ努力のうちに見ることを選んだ。もちろん,何とかいう「発明屋さん」が何年もの間格闘した課題を彼が即座に解決したときには,それは実に強い印象を与えた。しかし,彼の真の偉大さは些細なことのうちに,つまりありふれた状況において最も明瞭に発揮された。残念ながら,そのような些細なことを叙述するためには多くの紙幅が必要になる。付随的なディテールに立ち入らなければその叙述はぼやけたものになり,無に帰してしまうからだ。とは言え,それでもやはり手短な叙述を試みてみたい。

総合的に言えば、彼の偉大さとは、不合理な行動スタイルのようなものだ。ただし彼は変人ではまったくなくて、いかなる正常な人間よりも正常だった。それと同時に、つまらぬことのために限りない時間を費やし、馬鹿げた話に喜んで耳を傾け、文字どおりあらゆるものに対して興味を示した。どこかにいれば、まさにそこが心地よい場所であり、誰かと出会えば、一緒に歩き出した。まさにいにしえの賢人たちの言葉どおり、常に「今、ここに」生きていた。例えば、こんな場面を思い浮かべていただきたい。私はコーリャ・ボブイリョフ、リョーシャ・ポクロフスキーとともに、クラスノセリスキーの研究室で無駄話をしていた。ただし傍目には、真面目な雰囲気の中で一緒に深刻な問題に取り組んでい

るように見えただろう。そのとき突然、2階の研究室のある若きロモノーソフ^[駅注]がそこへ飛び込んできて、クラスノセリスキーからチョークをもぎ取り、かかとを踏みならし、大声で叫びながら、まったく何の前置きもなしに黒板に何か書きなぐり始めた。どうやらズボンを裏返しにはいているようだ。目が燃えている。私が誇張表現を最小限にとどめていることを信じていただきたい。ご存じのこととは思うが、科学は今、前方はるか遠いところまで進んで行ってしまったので、個人的な奇癖を持っていない人間には、そこにはもうやるべきことはない。科学者は変人度が高ければ高いほど、才能豊かなのだ。しかし、これはそれとは別のケースだ。たしかに変人度は高いが、それとは別のタイプらしい。要するに、このロモノーソフが完全なたわ言を言っているのは明らかだ。しかも初歩的なエチケットを破っている。私はびっくりしてそっくり返り、ボブイリョフはおかしくて息が止まりそうになり、ポクロフスキーは薄笑いを浮かべて、看護師を呼ぼうとか何とかもごもごつぶやいている。では、クラスノセリスキーは何をしている?

クラスノセリスキーは耳を傾けている! 右へ左へと激しく揺れる若者の手足の動きも、彼の邪魔をしない。彼が大笑いしたのは後になってからだ。今、彼は大いに満足して、注意深く聞き入っている。彼が何を見ているのか、私は知らない。しかし、彼は何かを見ている。それは若者の話の数学的内容だとは考えられない。そんなものはまったくなかった。まったく別の何か、現実を超越したところにある何かだ。しかも、それがどれだけの時間続いたか? 2 分間? とんでもない。話を最後まで持っていくのに要する時間だ。1 時間半後、熱気が冷め、幻影が消え失せたとき、若者はまるで魔法のように正常な姿を取り戻し、話ぶりがまともになり、ズボンさえもが裏返しでないことが判明した。すべての精神科医が束になってかかっても、あれほどの治療効果をあの若者にもたらすことはできなかっただろう。

マルク・アレクサンドロヴィッチ・クラスノセリスキーとは、 まさにそういう人間であった。 故人が永遠に記憶されんことを。

[[]献注] ミハイル・ロモノーソフは18世紀初頭に活躍した万能の天才で、ロシア科学の祖と言われる。

記号

本書では下記の標準的な記号が使われている。

• $x \in X : x \cup X$ に属する。

・ $X \cup Y$: 集合 $X \ge Y \ge \emptyset$ 和集合。

・ $X \cap Y$: 集合 $X \ge Y \ge \emptyset$ 共通部分。

· R^2 : 平面。

· R³ : 3 次元空間。

• *R*ⁿ : *n* 次元空間。

• i: 虚数単位, $i^2 = -1$.

• z = x + iy : 複素数。

・ $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$: 複素数の三角関数による記法。

• $x = \{x_1, ..., x_n\}$: ベクトル, x_i : ベクトルの座標。

· xy: ベクトルxとyのスカラー積

· x×y: ベクトルxとyのベクトル積。

・ $\frac{df(x)}{dx}$: 関数 f(x) の点 x における導関数 (x に関する変化の速度)。これと等価な記号:

 $f'(x)_{\circ}$

・ \dot{x} , \ddot{x} : 時間に関する1次と2次の導関数x'(t), x''(t)。

・ $\frac{\partial u}{\partial x}$: 関数 u の変数 x に関する偏導関数。偏導関数はほぼ第 16 章でのみ使われている。

・ $\nabla f(x)$: 関数 f(x) の勾配。すなわち、関数 f(x) の一定水準の面に対する法線の方向を向いているベクトル

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$

であり、数値的には f(x) の点 x における最大増加速度と等しい。

著者紹介



ヴァレリー・イヴァノヴィッチ・オポイツェフ (Валерий Иванович Опойцев, Valeriy Ivanovich Opoytsev) (1944~2018 年)。

ロシア科学アカデミー制御問題研究所部門長,数理物理学博士,教授,ロシア自然科学アカデミー(RANS)会員,モスクワ物理工科大学(MIPT)制御問題講座研究員。

V.ボス (Валерий Босс, Valeriy Boss) の筆名で多数の著書 (例えば本訳書 137 頁の著者注に掲げられている『数学講義』) を多数発表

している。2003年に初版が出版された本書『直観と数学』はベストセラーとなり、現在に至るまで何度も再版が繰り返され、ロシア語圏の理工系学生や数学・物理学の研究者・教育者の間で広く読まれている。「Vi Opoytsev youtube」でネット検索するとオポイツェフの講義ビデオ(ロシア語)を視聴することができる。