

ウラジーミル・V・エロヒン  
ローレンツ変換の幾何学

\*\*\*日本語版について\*\*\*

- \* 本訳文は, «Владимир В. Ерохин, Геометрия преобразований Лоренца (2009)» のロシア語からの全訳である。
- \* 原論文は, SciTecLibrary.ru(<http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/9672.html>)の画面下の«Читать подробнее»をクリックして入手することができる。
- \* 著者: ウラジーミル・ヴィクトロヴィッチ・エロヒン (Владимир Викторович Ерохин, Vladimir Viktorovich Erokhin)
- \* 訳者: 吉田 正友
- \* 訳者のサイト: 「物理の旅の道すがら」 (<http://naturalscience.world.coocan.jp>)
- \* 日本語版公開: 2025年7月
- \* 訳文中の角括弧 [ ] 内は訳注である。

目次

1. 変換の導出法.....	2
2. 幾何学を少々 .....	2
3. 運動する信号源と運動する受信器 .....	3
4. 特殊相対性理論における変換 .....	10
5. 球の神秘 .....	11
1. 変換の導出法 .....	12
6. アインシュタインの変換 .....	14

## Understanding of Relativity

特殊相対性理論に人気がある理由は、その単純さととっつきやすさにある。擬表面分散ポラリトンについてキッチンで話すことはできないが、空間、時間、運動といった概念を理解するためには、特別の素養は必要とされない。

それにもかかわらず、文献では、特殊相対性理論の結論全般、特にローレンツ変換に関する不正確な理解がしばしば見受けられる。それゆえ、以下において行われる、自明な事柄に明確性を与える試みが無駄にならないことを筆者は願っている。

## ローレンツ変換の幾何学

ウラジーミル・V・エロヒン

ローレンツ変換をめぐる論争は既にまる 1 世紀にわたって続いているが、これには理由がないように思われる。すなわち、変換は純粋に数学的な作用であり、数学は間違いを犯さないからである。しかし、人間は間違いを犯す。筆者は、相対論者たち自身がローレンツ変換の単純な本質を理解していないという意見を持つようになった。なぜなら、文献では、きわめて権威ある著者たちでさえ、相互排他的な解釈を与えているのを見ることができるからである

あなたはローレンツ変換の図解を見たことがあるだろうか？ 私は見たことがない。これはおそらく、相対論の支持者たちが主として 100 パーセントの分析家であるのに対し、図解は形象的知覚のために必要とされるものであり、形象的知覚は分析家にとって無縁なものであるからであろう。「真面目な」科学においては、絵入りの本は評価されず、図解は童話にとってのみ必要とされるとみなされている。私は、それとは異なる意見を堅持している。この論文は絵入り論文である。

### 1. 変換の導出法

順序としては、ここでローレンツ変換の古典的導出法を挙げるべきであるが、私はこれを本論文の末尾に移した。これは全ての読者にとって必要というわけではない。

### 2. 幾何学を少々

明確性と一義性を与え、しかもその際、余計な煩雑さを回避するため、我々はこれほどまでに真面目な論文に不真面目な絵を挿入した。これらの絵には、座標を分かり易く、具体的なものとするため、観測者  $P(x, y, z, t)$  が導入されている。それだけでなく、我々は  $z$  座標をゼロにした。なぜなら、課題は軸対称的であり、したがって作用全体が平面内で生じるように座標系を変換することを妨げるものは、何も存在しないからである。また、ビーム（信号）の進行を運動基準系と静止基準系の両方において示した。

3 角形 (図 2) において、3 辺のうち 1 辺は  $R = \sqrt{x^2 + y^2} = ct$  に等しく、他の 1 辺は  $= vt$  である。

リエナール・ヴィーヘルト半径を  $R^* = R(1 - v \cdot \cos \alpha / c) = (R - vx/c)$  と取ると、半径  $R^* = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2(1 - v^2/c^2)}$  がそれと等しくなる。この  $R^*$  を  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  で割ると、ローレンツ半径が得られる：

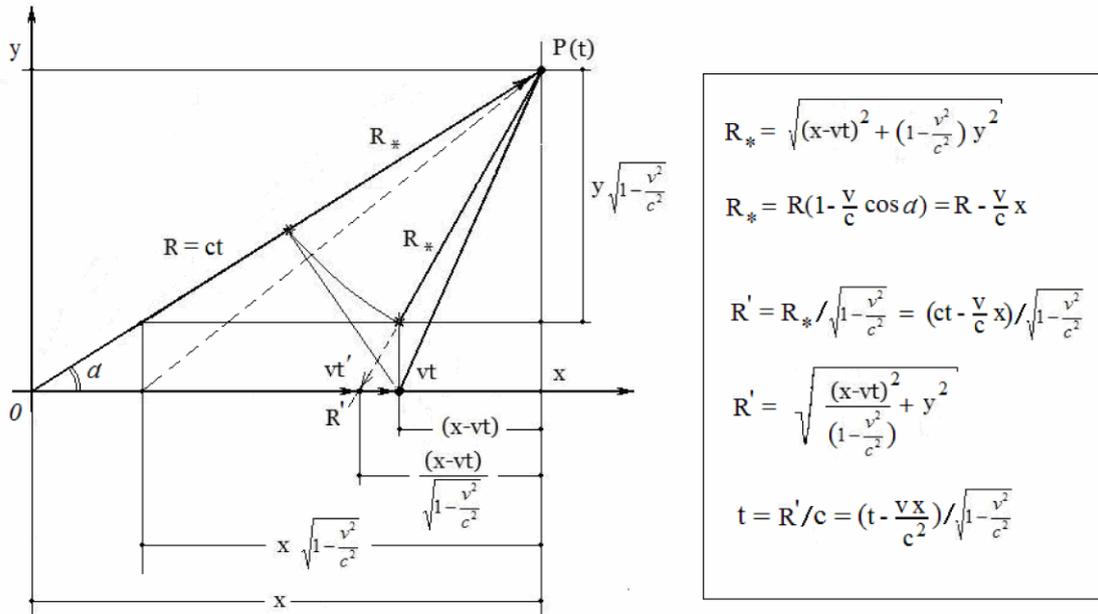


図 2. ローレンツ変換で用いられている 3 三角形の幾何学的関係

$$R' = \sqrt{(x-vt)^2 / (1-v^2/c^2) + y^2} = (R - vx/c) / \sqrt{1-v^2/c^2} = ct'.$$

それだけでなく、この図に示されているように、我々は  $x\sqrt{1-v^2/c^2}$  という値を得る。

相対論的収縮を決定しているのは、形式主義者たちが利用している値  $(x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$  ではなく、他ならぬこの値であるにもかかわらず、文献においてはこの値は見受けられない。また、破線で描かれている 3 三角形の 3 辺の関係にも注意を払おう：

$$\left( x\sqrt{1-v^2/c^2} - (x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2} \right) / R' = v/c.$$

ローレンツ変換では、3 三角形の幾何学のこれらの特徴が用いられている。

### 3. 運動する信号源と運動する受信器

ローレンツはその変換をエーテル理論の枠内で導出した。それより 1 年後、アインシュタインは全く別の推論から出発して変換を導出した。これらの変換がエーテルありでも、エーテルなしでも同一の形を持っていることの解釈をめぐる論争することに意味はない。特殊相対性理論では、速度の概念に込められる意味のみが変化している。(絶対運動時においても、相対運動時においても変換が同一であるということは、既にそれ自体が奇妙なことである)。以下においては、ローレンツの解釈における変換について検討しよう。すなわち、絶対運動という理解を用いよう。そしてその次に、相対運動に移行しよう。(変換はいずれの場合も同一となるが、しかし、その本質は若干変化する)。

まず最初に、受光器が静止しているときの運動する光源の場合について検討しよう (図 3)。

基準系  $S$  中において、 $x$  軸に沿って光源  $O'$  (基準系  $S'$ ) が運動している。この光源は、時刻  $t = t' = 0$  に基準原点 ( $O' = O$ ) を通過し、閃光を発する。

時間  $t = R/c$  が経過したとき、信号は座標  $(x, y)$  の点で静止している観測者  $P$  に到達する。この時間の間に、光源は距離  $vt$  だけ変位する。すなわち、点  $P$  から観測した場合、時刻  $t$  に

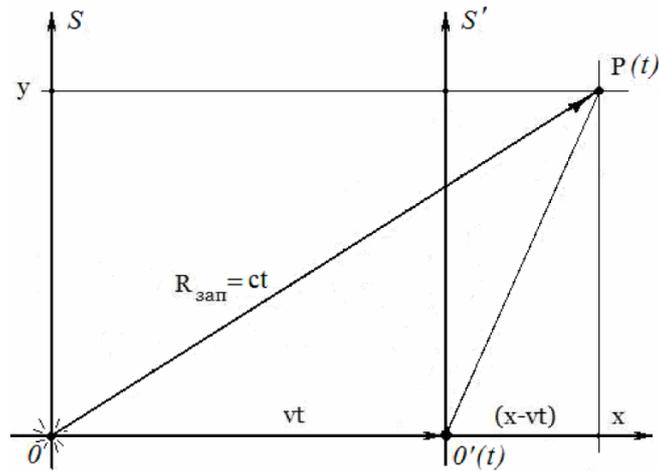


図 3. 信号源 ( $O'$ ) が運動し、観測者  $P$  は静止している。  
 [図中の  $R_{\text{sant}}$  の添字  $\text{sant}$  は del (delay, 遅延)。以下同]

おける光源  $O'$  の座標は  $(x - vt, y, t)$  である。

静止基準系 ( $S$ ) 中にある観測者  $P$  が受信器である場合には、運動基準系 ( $S'$ ) に関しては普通のガリレイ変換が得られる： $x' = (x - vt)$ ,  $y' = y$ ,  $t' = t$ 。

今度は、運動基準系 ( $S'$ ) 中にある観測者  $P'$  が受信器の役割を果たしている場合について検討しよう。

図 4a, b では、前の図 3 の場合と同様に、破線で描かれている系  $S'$  が運動している。時刻  $t = t' = 0$  に両方の系の基準原点が一致し ( $O' = O$ )、その瞬間、共通の座標原点から閃光が發せられる。しかし、今回、受信器の役割を果たしているのは、静止している観測者  $P$  ではなく、基準系  $S'$  と一緒に運動する観測者  $P'$  である。

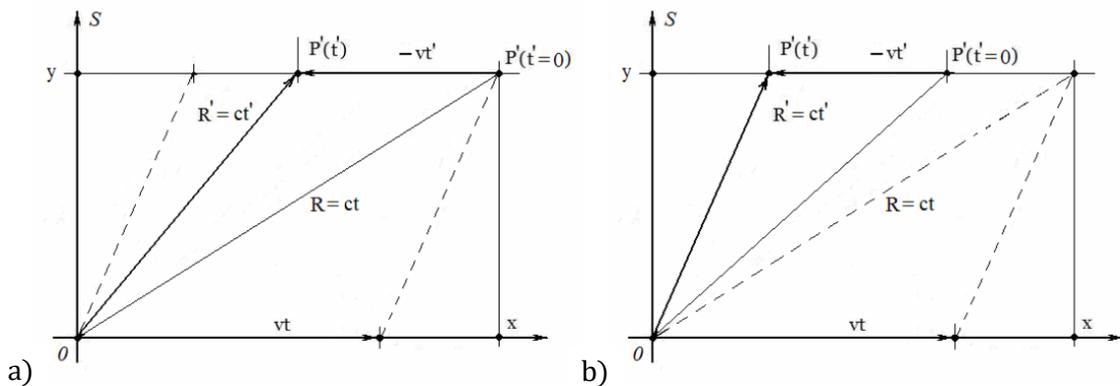


図 4a, b. 受信器 (基準系  $S'$ ) が運動している。

ガリレイによれば時間は絶対であり、かつ  $t' = t = 0$  という条件が存在していたのであるから、 $P'$  にとっての始点の役割を果たしているのは、図 4a におけるように、座標  $(x, y)$  でなければならない。しかし、時間の尺度の不変性を否定すれば、図 4a と 4b に示されている場合の間において、原理的には複数の解が存在することができる (なぜなら、この変換の課題には  $R - ct = R' - ct'$  という条件しか存在しておらず、この条件は、それらの場合の任意の場合に満たされることができるからである)。

それにもかかわらず、ローレンツ変換は完全に一義的な 1 つの解を与えている。なぜだろうか？

それは、さらにもう 1 つの条件、すなわち球面波という条件が暗黙的な形で存在しているからである：運動系中では、全てのものは静止系中におけるのと同じように見えなけれ

ばならない。

初期時刻 $t' = t = 0$ に、信号が、それが受け取られることになるのと同じ運動基準系から発射されると仮定すれば、状況はより明確になる。こうして、観測者は光源に対して静止しており、球面波を見なければならぬことがより明瞭になる。しかし、自分の系中で静止している（ $S$ に対して運動する）観測者 $P'$ もまた、それと同じもの（球面波）を見なければならぬ。なぜなら、静止基準系中では、光は光源の運動とは無関係に伝播するからである（図5）。

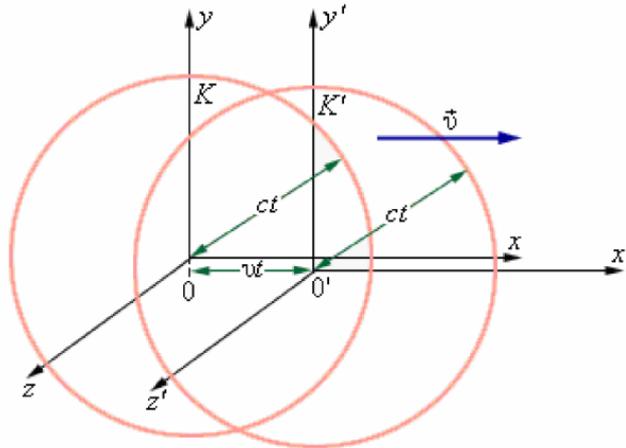


図5. 球面波の波面は両方の基準系で観測される。それにもかかわらず、ローレンツ変換が主張するところによれば、これら2つの球面は、1点から出た同一の閃光、すなわち同一の球面である。

球面波の波面は両方の基準系で観測される。神秘か？ 特殊相対性理論はまさにこれによって人々の心をつかんでいる—不可能なことの可能性によって。事象の非同時性は矛盾を両立させることを可能にする。

ローレンツの解を図6に示す。（ここで我々は、検討されている諸状況の類似性を維持するため、速度の記号を $v$ に変えた）。

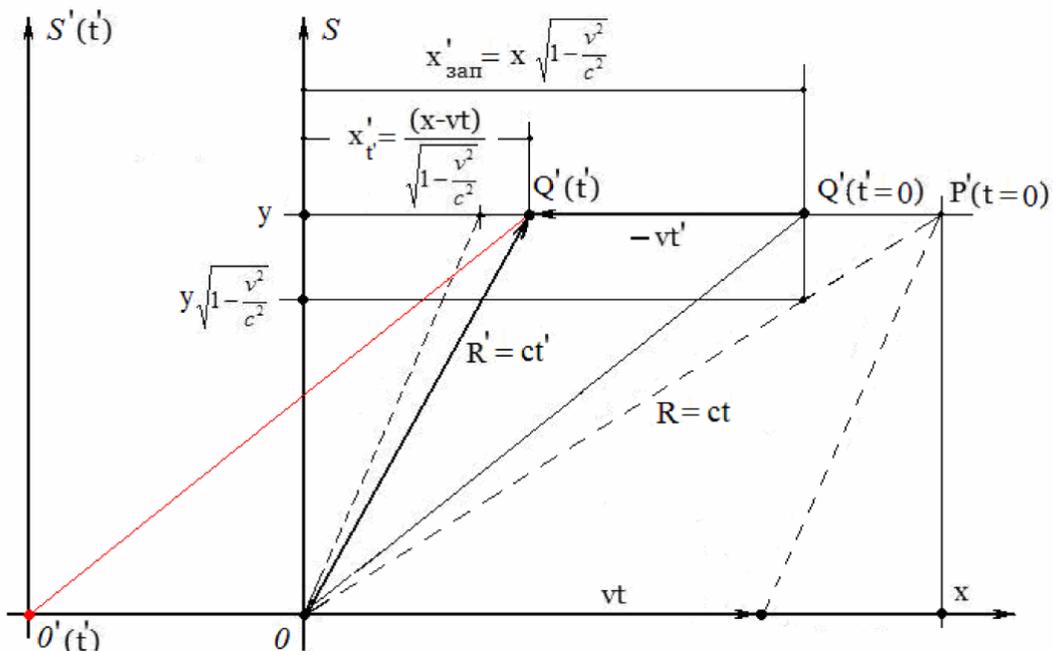


図6. 受信器 $Q'$ （基準系 $S'$ ）が運動している。状況は基準系 $S$ 中の静止している観測者の視点から示されている。

運動基準系 $S'$ は、時刻 $t = t' = 0$ に基準原点 ( $O' = O$ ) を通過し、閃光を發する。受信器の役割を果たしているのは基準系 $S'$ と一緒に運動する観測者 $Q'$ であり、光源 $O'$ は彼に対して静止している。(ただし、第2公準によれば、光源は $O'$ にも、 $O$ にも結び付けることができる)。

しかし、我々はこの課題を静止基準系 $S$ から検討しよう。光は静止基準系中を光源の運動とは無関係に伝播するのであるから、我々にとっては、光は基準原点 $O$ から速度 $c$ で伝播し、基準系 $S'$ の基準原点 $O'$ は観測者 $Q'$ と一緒に左側へ速度 $v$ で運動する。基準系 $S'$ 中の運動する観測者 $Q'$ は自分を静止しているとみなしている。それゆえ、彼にとっては、光源は基準原点 $O'$ と結び付いており、光はその点から球面状に伝播する。したがって、同一の閃光に対し、我々は球面波の2つの波面、そしてそれに対応して2つの中心、2つの光源を持つことになる。この神秘についてはこの少し先で分析することにして、今はこの話を続けよう。

閃光が發せられた時刻 $t' = 0$ に、運動する観測者 $Q'$ は点 $(x\sqrt{1-v^2/c^2}, y)$ を通過する。彼の座標は図3における前の観測者 $P'$ の座標 $(x, y, t)$ とは異なっている。

信号は時刻 $t' = R'/c$ に観測者 $Q'$ に到達する。このとき、彼の座標は $x' = (x - vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ,  $y$ である。表式 $t' = R'/c$ において、半径 $R'$ は $[R - (v/c)x]/\sqrt{1-v^2/c^2}$ に等しい。

これに $R = ct$ を代入し、 $c$ で割ると、時刻の値 $t' = (t - vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ が得られる。

このように、ローレンツ変換は単純明快な意味を持っている：

$$x' = (x - vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}, \quad y' = y, \quad t' = (t - vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

それだけでなく、

$$x'_{\text{del}} = x\sqrt{1-v^2/c^2}, \quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$$

であることに注目すべきである。1番目の場合(図3)には、信号は静止している受信器まで、経路 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ を進行しなければならなかったのに対し、運動する受信器の場合

(図6)には、光路は変化している。それゆえ、信号がそこで観測者に到達する座標 $x'$ 、また、運動する受信器の初期座標 $x'_{\text{del}}$ は、明らかに、それとは異なったものとなる。そしてそれは、時空の性質が変化したからではなく、光が、我々が $R$ に沿った光路ではなく、 $R'$ に沿った光路について検討しているという理由によってのみ変化することができない同一の空間中において、別の半径に沿って進行するからである。

誰かが古典物理学と相対論的物理学を区別したくなるとすると、その違いは、高速度のときには信号の遅延を考慮する必要があるのに対し、ニュートンの古典力学はそれを考慮していなかったということのみである。ただし、科学は発展しているのであるから、従来の法則に修正を加えるのはまったく自然なことであると私は考えている。その際、古典物理学と相対論的物理学の区別を強調する必要は、おそらくないであろう。それはただ単に、そこでは遅延を無視することができる課題と、無視してはならない課題とが存在しているというだけのことである。はたして、古典力学は遅延を考慮することができないのであろうか？

どうしたわけか、話が物理現象の古典的解釈のことに及ぶと、多くの反対者たちは、アインシュタインの相対論を抜きにしては誰も何も変えることができない、大昔の古臭い理解を必ず思い浮かべる。なぜであろうか？ 古典物理学という言葉が意味しているのは、と

つくに歴史の彼方に消え去った遠隔作用その他の 18 世紀の過去の遺物ではなく、物事の建設的な考え方の自然な発展であることを理解するべきである。古典物理学の相対論との違いは、根拠のない神秘や現実の歪曲が存在しないこと、そして運動、空間および時間の全面的相対主義ではなく、唯物論的なものの見方がなされていることのみである。

それに対して、相対論は、そこでは信号の遅延が空間および時間の歪みにすり替えられ、その結果、もはや古典物理学とは原理的に異なる全く別の物理学が得られているという理由により、領域間の境界を明確に定めている。

ローレンツは、座標の変化には絶対的の意味があるとみなしていた。なぜなら、この要件は、そこでは静止した干渉計が運動しているとみなされていたマイケルソン・モーリーの実験から導き出されたからである。全ての電磁気実験は、実験室基準系が常に「ゼロ基準点」として登場することを示している。

遅延座標 $x'_{\text{del}}$ に注意を払おう。解析的導出法には、このパラメーターは存在しない。運動基準系 $S'$ 中においては、信号は半径 $R' = ct'$ に沿って観測者 $P'(t')$ に到達する。観測者に対する信号源の現在位置 $(O)$ はいかなる意味も持っていない。すなわち、光速は有限であるから、観測者は遅延信号しか見ることができない。観測者の意見によれば、基準系 $S$ 中においては、光行差により、運動する観測者は信号源を点 $O'(t')$ に見る。図 7 では、信号は実際には $(O)$ から来たにもかかわらず、見かけ上の信号経路は遅延半径に対して平行な赤線で示されている。座標 $x'_{\text{del}} = x\sqrt{1 - v^2/c^2}$ は、まさに、運動基準系中で観測される「相対

論的」収縮を示している。これは、第 1 に、値が $x$ の $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 分の 1 である、運動する観測者の初期縦座標であり、第 2 に、光源までの距離の観測される縦座標である。基準系 $S$ 中にある静止した観測者の視点から見ると、運動する観測者 $Q'$ は、光を、それがまるで自分の遅延座標 $x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 、 $y' = y$ 、 $t' = 0$ において静止しているかのように見る（観測者 $Q'$ は、自分の基準系中において、実際に静止している）。

さらに、次のことが分かる：

静止基準系中において、光が速度 $\ll c \gg$ で伝播し、静止している観測者 $P$ に時刻 $t = R/c$ に到達し、そのとき、観測者 $P$ に対する運動基準系の原点が座標 $x' = (x - vt)$ 、 $y' = y$ を持っている場合（図 3 参照）には、光は、運動する観測者 $Q'$ にそれより早い時刻 $t' = t - vx/c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ に到達する。このとき、静止系 $S$ の基準原点に対する座標 $Q'$ は $(x - vt)/$

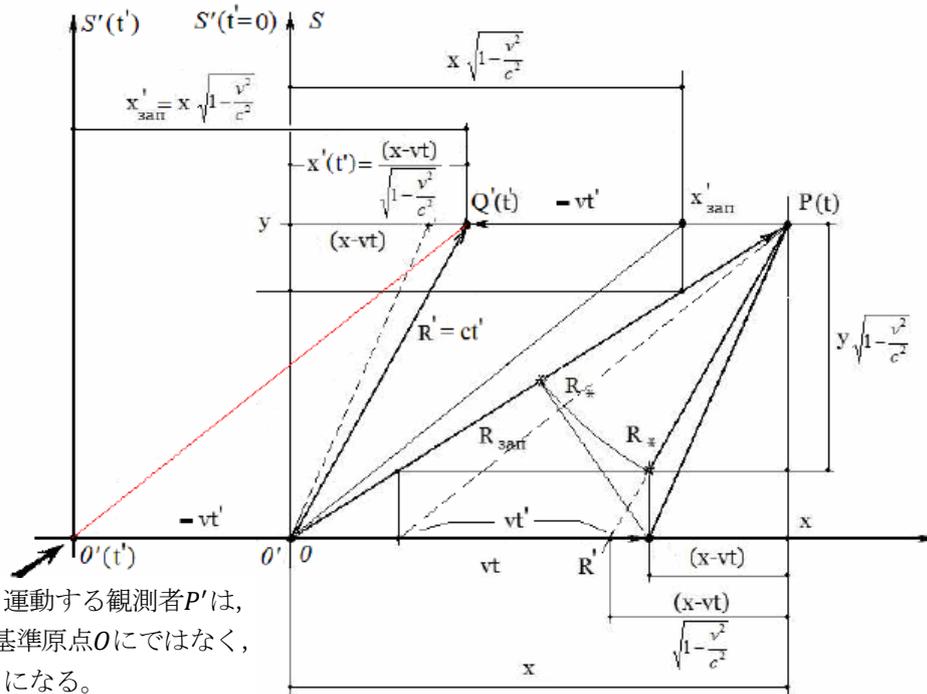
$\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 、 $y, t'$ である。運動する観測者の（閃光時刻における）遅延座標は $x\sqrt{1 - v^2/c^2}$ である。この場合には、光は静止基準系 $S$ 中を速度 $\ll c \gg$ で運動するが、しかし 2 番目の場合には、より短い経路 $R'$ を進行する。それに対応して、基準系 $S'$ もまた、この時間の間に、より短い距離 $vt' = (v/c)R'$ だけ変位する。

ローレンツ正変換（静止系から運動系へ移行するとき）：

$$(x - vt) \rightarrow (x' - vt') = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$t \rightarrow t' = (t - vx/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

横座標は変化しない。



光行差により，運動する観測者P'は，閃光（信号）を基準原点Oにはなく，ここに見ることになる。

**図7.** 運動する観測者の基準系において観測される基準原点。運動する観測者は，信号を，まるでそれが遅延位置 $x'_{\text{del}}$ で静止しているかのように見る。

実は，信号は，自分の基準系 $S'$ 中において，基準系 $O'$ に対して静止している。それゆえ，「まるで…かのように」という仮定法は余計である。仮定法は基準系 $S$ にいる観測者に当てはまる。我々は，図3に示されている場合と同様に，この場合にも，状況をこの観測者との関係において検討している。

運動する観測者自体も $x$ 軸に沿って収縮する。それゆえ，彼は物差しの収縮に気付かない。

（収縮しているのは他ならぬ運動する観測者 $S'$ であることに注意を払おう。運動の相対性の場合には，観測者 $S'$ の視点から見ると，今度は基準系 $S$ における物差しが収縮していることになる。このことは，収縮は現実の物理現象ではなく，観測上の効果にすぎないということを意味している）。

それに対応して，ローレンツ逆変換は次のようになる：

$$x \rightarrow x'_{\text{del}}/\sqrt{1-v^2/c^2} = (x' - vt')/\sqrt{1-v^2/c^2},$$

$$t \rightarrow (t' + vx'/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

時間の変換 $t \rightarrow t'$ の意味は，半径 $R = ct$ および $R' = ct' = [R_{\text{del}} - (v/c)x]/\sqrt{1-v^2/c^2}$ から一目瞭然たる形で見取ることができる。

$x' = (x - vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ は増大し，遅延縦座標 $x'_{\text{del}} = x\sqrt{1-v^2/c^2}$ は収縮することに注目しよう。相対論的収縮は，増大する現在座標 $x'$ とではなく，遅延座標 $x'(\text{del})$ と関係しているのである。相対論者たちは，この増大を収縮に変えようと試み，しばしば正変換を逆変換にすり替え，あるいはまた，収縮しているのは運動座標ではなく，運動基準系から観測される静止座標であるなどと語っている。相対性理論は，それが存在し始めてから100年経っても一義的な意見に達していない。



これは、絶対運動を含んでいるローレンツの解釈におけるものである。ここで、図3に示されている状況との違いは、図3では受信器が静止しているのに対し、この場合には受信器が運動していることである。しかし、運動を相対的とみなした場合には、原理的な違いは存在せず、結果は図3におけるのと同じとなり、いかなる収縮も生じないはずである。ところが、それとは全く別の結果が得られた。なぜなら、それでもやはり、観測者 $Q'$ は運動しており、基準系 $S$ は静止しているからである。

#### 4. 特殊相対性理論における変換

我々はここまで、変換についての検討を、絶対運動を含んでいるローレンツのエーテル理論の枠内で行ってきた。

今度は、図8に示されている状況について、運動の相対性原理(図9)の観点から検討しよう。

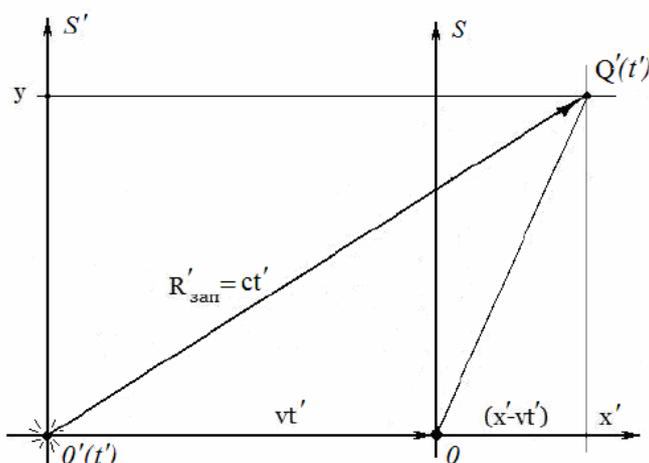


図9. 図8におけるのと同じ事象であるが、今回は相対性原理に従っている：基準系 $S'$ 中にある観測者 $Q'$ は静止しており、基準系 $S$ は運動している。しかし、このような場合には、図3で検討したのと同じのバリエントが得られる。

図9に示されているバリエント、ただし、基準系 $S$ に関するバリエントは、既に上記(図3)において検討された。違いは速度の記号のみにある。

観測者 $Q'$ は静止しているのであるから、彼の基準系の尺度が収縮する原因は存在せず、それゆえ、 $x' = x$ である。ここでのプライム記号は、2つの基準系を区別するためにのみ付けられている。これと同じことが時間 $t'$ にも当てはまる。

特殊相対性理論の相対性原理の逐次的適用は、完全な対称性をもたらす(図9と図3を比較されたい)。相対性原理により、次のようにならなければならない：2つの慣性基準系は等価であり、両方の観測者は同一の描像を見なければならない。しかし、このような場合に、いったい何のために、ローレンツ変換についてやっかいな検討をしなければならないのか？

ローレンツ変換を適用した場合には、基準系 $S$ にいる観測者 $Q'$ の視点から見ると、尺度は収縮することになり、マクスウェル方程式の不変性は破れる。

ローレンツ変換は、静止した観測者ではなく、運動する観測者、すなわち運動する受信器を想定している。それに対し、特殊相対性理論においては、あらゆる観測者は、自分の運動に気付いていないため、自分を静止しているとみなす権利を持っているだけでなく、実際に静止している。

絶対運動の観点から見ると、それらの間の違いは、図3においては受信器が静止してい

たのに対し、この場合（図 8 参照）には受信器が運動していることにある。2 つの場合は対称的ではない。

しかし、運動が絶対的であるならば、他ならぬ誰を運動しているとみなすかということには、原理的な違いは存在しない。それゆえ、相対性原理によれば、結果は図 3, 図 9 におけるようになる。変換は、2 人の観測者のうち的一方が実際に運動しているとみなした場合にのみ得られる。

## 5. 球の神秘

しかし、球面波についての検討に戻ろう。

運動基準系中では静止基準系中におけるのと同じ球面波が観測されることになるという神話は、概念のすり替えの上に構築されている：放射源の周りの等しい距離の所に、観測者たちが配置されている。それらの観測者たちの役割は、普通のミラーが果たすことができる。それらの観測者たちは、信号を同時には受け取らない。すなわち、運動基準系中にはいかなる球面も存在しない。しかし、それらの観測者=ミラーたちが、波を記録したという信号を運動する「中心」に向けて送り返すときには、それらの信号はそこへ同時に送り届けられる。まさにここから、観測される球面なるものに関する結論が下されている。

静止基準系  $S$  の原点から半径  $R$  の球面を書こう。運動基準系  $S'$  においては、我々は楕円面— $x$  軸に沿って  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  分の 1 に収縮した球面—を書かなければならなくなる（図 10）。

球面上に、何人かの観測者  $P_1, P_2, P_3$ , 等々を配置しよう。

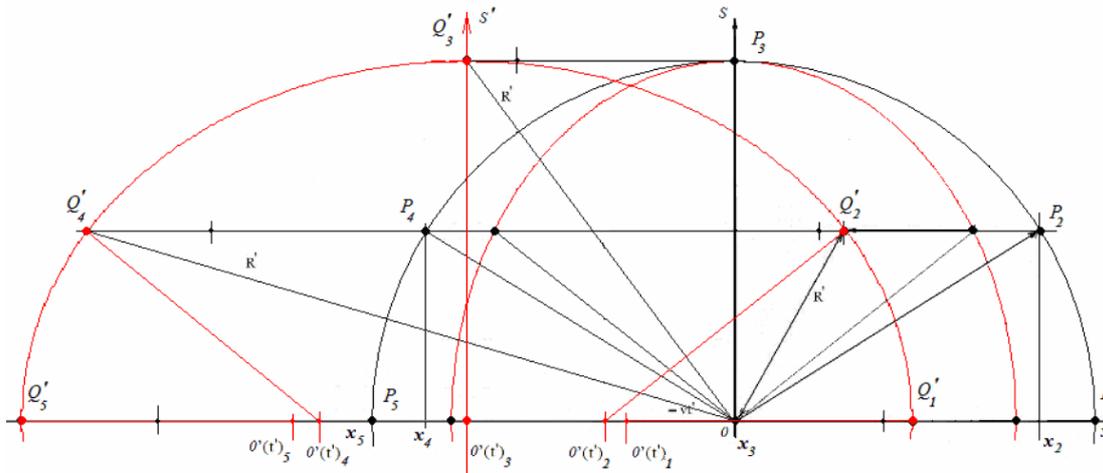


図 10. 運動する観測者たち  $Q'_1 - Q'_5$  は、同一の信号を相異なる時刻  $t'_i$  に受け取り、それに対応して、信号を  $x$  軸上の相異なる点において見ることになる。

仮に信号の観測時刻  $t'_i$  を 1 つの時点に持っていったとすると、信号は、全ての運動する観測者たちにとって同時に、かつ 1 点において見えるようになる。信号源は運動基準系の点  $O'$  であり、この基準系中にある観測者たちは、半径  $R'(t')$  が相異なっているため、閃光を同時には見ないということをここで付け加えておくことは無駄ではなからう。

したがって、運動する観測者は球面を瞬時に見ることができる。ただし、それと引き換えに、その球面は 1 つの閃光によってではなく、光源の連続的発光によって形成されたものとなる。ある面から見ると、このことは事象の非同時性の正しさを証明することができる。しかし別の面から見ると、閃光はそれでもやはり 1 つであったのであり、それゆえ、観測者はいかなる球面も同時に見ることはなく、球面の相異なる部分を相異なる時刻に見るだけとなる。

静止基準系中においては、それらの観測者たちは信号を時刻 $t$ に同時に受け取る。運動基準系中においては、当該の観測者たち $P'_1, P'_2, P'_3$ は、静止した観測者の視点から見ると、信号を相異なる時刻 $t'_1, t'_2, t'_3$ に受け取る。我々が運動基準系中に移動したとすると、時刻 $t'_1, t'_2, t'_3$ は我々にとって同時となる。しかしそのとき、信号の放射時刻 $t$ は非同時となる。時刻 $t'_1, t'_2, t'_3$ を1つの時点に持っていくことが可能であるが、しかしそのとき、信号の放射時刻 $t$ は非同時となる。すなわち、特殊相対性理論によれば、運動する観測者たちは信号を同時に見ることになるが、しかし彼らにとっては、それは1つの信号ではなく、同一の点から、ただし相異なる時刻に発生された複数の信号となる。ところが、それでもやはり、閃光は1つであったのである。事象の非同時性に関する言い逃れが助けにやって来る：いわく、我々は、複数の信号が同時にではなく送られたのを見ているが、しかしそれは我々に対して運動している基準系 $S$ 中においてであり、実際には、我々の静止基準系 $S'$ 中においては、我々はそれらを同時に受け取っている、つまり、まさにそのとおりであったのだ、と。確かに、まさにそのとおりであったが、しかし、もしそうであるとすると、複数の信号は運動する観測者たち $P'_i$ によって同時にではなく受け取られる。神秘は、論理の不足から、あるいはまた、現実の事象を歪曲したいという大きな願望から生じる。運動する観測者が球面を見るためには、信号はある時間間隔 $\Delta t$ の間、絶え間なく送出されなければならない。

### 1. 変換の導出法

ローレンツ変換の導出法をごく一部だけ省略して引用しよう。

課題はおおよそ次のように設定されている：ある基準系から、それに対して運動する別の基準系に移行する際、座標 $(x, y, z, t)$ の変換を見出す。「おおよそ次のように」と書いたのは、明確な設定を文献において見出すのが困難であるからである。これはまるで、説明を必要としない、自明の問題であるかのようなものである。

簡潔にするため、叙述の形式的厳密性のために必要とされる多数の留保条件は省略する。それらは大体のところ、それでなくても自明の事柄である。

図1に示されているように、2つの基準系 $S$ および $S'$ が互いに対して速度 $v$ で等速直線運動をしている。

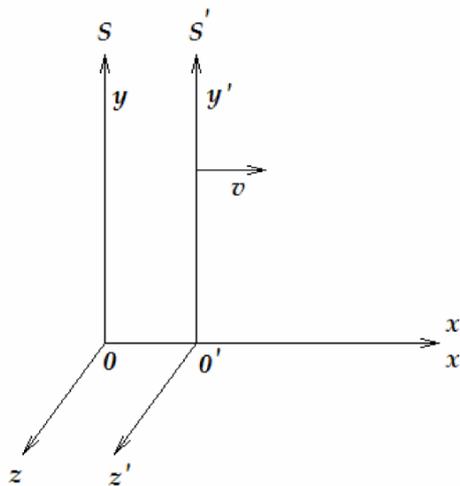


図1. これが、アカデミックな真面目さを遵守して描くことが可能な最大限度である。

基準系 $S'$ の運動方向を $x$ 軸として選ぼう。

時刻 $t = t' = 0$ に座標原点 $O$ と $O'$ が一致し、その瞬間、共通の基準原点から光信号が発射される。

基準系 $S$ 中における光球面波の伝播は次の方程式によって記述される：

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1)$$

基準系 $S'$ 中における伝播はこれに類似した方程式によって記述される：

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (1')$$

引用者による注：2つの間隔の等式 $s = s'$ は、両方の基準系中における光速の相等性を前提としている。また、次のことに注目しよう：一般的な場合には、間隔 $\llbracket s \rrbracket$ は任意の値を取ることができる。しかし、この間隔をゼロと等置することは、自明のことだが、 $R = ct$ ,  $R' = ct'$ （それぞれ、表式(1)および(1')）を意味しており、条件を基準原点に照応させている。もっとも、このことは条件においても留保されている。

(1)と(1')の等式は、次の場合にのみ成立することができる：

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) = k(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2).$$

ここで、係数 $k$ は速度 $v$ にのみ依存する。

[ここで引用されている導出法では] この先において $k = 1$ であることが証明される。我々は、ゼロと等置される関数の種類とは無関係に、 $0 = 0$ であることは自明であるとみなし、その証明を省略する。

速度ベクトルに対して横方向の座標は不変に保たれることが、ついでに形で決定されている：

$$y' = y, \quad z' = z.$$

結局、次式が得られる：

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2. \quad (2)$$

(上式に $= -(y^2 + z^2)$ を付け加えよう)。  $x'$ および $t'$ は $x$ および $t$ の1次関数であるから、座標と時間の相互関係を考慮すると、次のように書くことができる：

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t; \\ t' &= \gamma x + \delta t. \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は、条件(2)が全ての $x$ および $t$ について満たされるように決定される。

点 $O'$ の場合には、 $x' = 0$ が得られる。それゆえ、 $\alpha x + \beta t = 0$ であり、 $S$ に対する $O'$ の運動法則は次式のようになる：

$$x = -\beta t / \alpha.$$

そして $S$ に対するこの点の速度は $v$ であるから、次式が得られる：

$$\beta = -\alpha v.$$

点 $O$ の場合には、座標は $x = 0$ である。すると、 $t' = \gamma x + \delta t = \delta t$ 、すなわち $t = t' / \delta$ が得られる。得られた結果を $x' = \alpha x + \beta t = \beta t$ に代入すると、 $S'$ に対する点 $O$ の運動を記述する公式が得られる：

$$x' = \beta t' / \delta.$$

対称性に関する推論から、 $S'$ に対する $O$ の速度は $v$ であることが導き出される。 $\beta = -\alpha v$ を考慮すると、このことは次式を与える：

$$\beta = -\delta v = -\alpha v, \quad \text{すなわち} \quad \delta = \alpha. \quad (3)$$

$\beta = -\alpha v$ および $\delta = \alpha$ を考慮すると、方程式 $x' = \alpha x + \beta t$ および $t' = \gamma x + \delta t$ は次の形に書き換えることができる：

$$x' = \alpha(x - vt);$$

$$t' = \gamma x + \alpha t.$$

得られた $x'$ および $t'$ の値を $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ に代入すると、次の2次方程式が得られる：

$$x^2 - c^2 t^2 = (\alpha^2 - \gamma^2 c^2)x^2 - \alpha^2(1 - v^2/c^2)c^2 t^2 - 2\alpha(\gamma c^2 + \alpha v)xt. \quad (4)$$

この方程式は $x$ および $t$ の全ての値のときに満たされるのであるから、この方程式に両辺における $x^2, t^2$ および $x, t$ に付いている係数は、それぞれ等しい。このことは、 $\alpha$ と $\gamma$ の2つの値を決定するための3つの方程式を与える：

$$(\alpha^2 - \gamma^2 c^2) = 1,$$

$$\alpha^2(1 - v^2/c^2) = 1,$$

$$2\alpha(\gamma c^2 + \alpha v)xt = 0.$$

最後の2つの方程式から次式が得られる：

$$\alpha = 1/(1 - v^2/c^2), \quad (5)$$

$$\gamma = \alpha v/c^2. \quad (6)$$

方程式(4)の両辺における $x^2$ に付いている係数の相等性を表している1番目の方程式は、恒等的に満たされ、したがって方程式(3)、すなわち点 $O$ は $S'$ に対して速度 $-v$ で運動しているという予想が方程式(2)と整合していることを示している。(自明のことであるが、このことは既に課題の条件から導き出される)。

上記において得られた値 $x' = \alpha(x - vt)$ および $t' = \gamma x + \alpha t$ に(5)および(6)を代入すると、事象の時空座標に関する変換の法則、すなわち有名なローレンツ変換が得られる：

$$x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad y' = y, \quad z' = z.$$

$$t' = (t - vx/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

逆変換は、正変換から、プライム付きの変数とプライムなしの変数を変換し、速度 $v$ の符号を逆にすることによって得られる：

$$x = (x' + vt')/\sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad y = y', \quad z = z'.$$

$$t = (t' + vx'/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

以上。

## 6. アインシュタインの変換

最後に、アインシュタインによるローレンツ変換の導出を彼の1905年の論文から引用しよう。

### A. アインシュタイン

#### 運動物体の電気力学について [訳注]

### §3. 静止系からこれに対して等速直線運動をしている座標系への座標および時間の変換理論

[訳注] この論文からの引用部分の露訳版(1965年出版)を邦訳版(アインシュタイン『相対性理論』, 内山龍雄訳, 1988年, 岩波書店)と比較したところ、2つの版の間にはかなり大きな違いがあり、露訳版には細部の説明文が大幅に簡略化されている箇所が多数あることが判明した。以下の訳文は露訳版から訳したものである。

「静止している」空間中に、2つの座標系が与えられているとしよう。各座標系は、1点から出ている互いに垂直な3本の軸を持っている。両方の系のX軸は一致しており、Y軸およびZ軸はそれぞれ平行であるとする。各系には物差しおよびいくつかの時計が備わっているとす。両方の系における2つの物差しおよび全ての時計は、正確に同じものであるとする。

さて、これらの系の一方( $k$ )の座標原点に対し、他方の静止系( $K$ )の $x$ 座標の値が増加する方向における(一定)速度 $v$ が伝達されており、この速度は座標軸および当該の物差しおよび時計にも伝達されているとしよう。このとき、静止系( $K$ )の各時刻 $t$ に対しては、運動系の座標軸の特定の位置が対応している。したがって、我々は、対称性に関する推論に基づき、運動系 $k$ の運動は、時刻 $t$ (以下、 $t$ は常に静止系の時間を表すものとする)における運動系の軸が平行となるようなものであり得ると仮定する権利を持っている。

次に、空間の各点の位置の決定が、静止系 $K$ 中では、その中で静止している物差しを使ってなされ、こうして座標 $x, y, z$ が得られており、また、運動系 $k$ 中では、その中で運動している物差しを使ってなされ、こうして座標 $\xi, \eta, \zeta$ が得られているところを思い浮かべてみよう。静止系中に存在する静止した時計を使い、また§1に示されている方法による光信号を用いて、時計が存在している静止系の全ての点に対して静止系の時間 $t$ が決定されよう。さらに、これと同様に、§1に示されている時計が存在している点同士の間における光信号の方法を用いて、運動系に対して静止している時計が存在している運動系の全ての点に対して運動系の時間 $t'$ が決定されよう。

静止系中における事象の場所および時刻を完全に決定する値 $x, y, z, t$ の各組に対しては、系 $k$ 中におけるその事象を決定する値 $\xi, \eta, \zeta, \tau$ が対応している。そこで次に、これらの値を関係付ける方程式を見出す必要がある。

我々が空間および時間が持っていると考えている一様性という性質により、それらの方程式が1次方程式でなければならないことは全く明らかである。

$x' = x - vt$ と置いた場合には、系 $k$ 中で静止している点に対しては、時間に依存しない、値 $x', y, z$ の特定の組が帰属することになる。我々はまず最初に、 $\tau$ を $x', y, z, t$ の関数として決定しよう。この目的により、我々は、 $t'$ とは、その意味という点で、§1で述べた規則に従って同期的に進行する、系 $k$ 中で静止している時計の示度の総体に他ならないことをいくつかの関係式を用いて表さなければならない。

光ビームが時刻 $\tau_0$ に系 $k$ の座標原点からX軸に沿って点 $x'$ に向かって送出され、時刻 $\tau_1$ にそこから元来た方へ、座標原点に向かって反射され、時刻 $\tau_2$ にそこに到達するとしよう。このとき、次の関係が存在しなければならない：

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1.$$

または、関数の独立変数 $\tau$ を書き出し、静止系中における光速度不変の原理を適用すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \left[ \tau_0(0,0,0,t) + \tau_2 \left( 0,0,0, \left\{ t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} \right\} \right) \right] = \tau_1 \left( x', 0,0, t + \frac{x'}{V-v} \right).$$

$x'$ を無限小にとると、これより次式が導き出される：

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v} \frac{\partial \tau}{\partial t'}$$

または

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

我々は座標原点の代わりに、光ビームの送出点としてそれ以外のあらゆる点を選ぶことができたはずであり、それゆえ、今得た方程式は $x', y, z$ の全ての値について成立すること

に注目する必要がある。

静止系から観測したとき、 $Y$ 軸および $X$ 軸に沿った光は常に速度 $\sqrt{V^2 - v^2}$ で伝播することを考慮すると、これらの軸に適用される同様の推論は次式を与える：

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

$\tau$ は1次関数であるから、これらの方程式から次式が導き出される：

$$\tau = a \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

ここで $a$ は今はまだ未知の関数 $\varphi(v)$ である。また、簡単のため、系 $k$ の座標原点においては、 $\tau = 0$ のとき、 $t$ も $t = 0$ とした。

この結果を利用すれば、 $\xi, \eta, \zeta$ の値を見出すことは容易である。この目的により（相対性原理と組み合わされた光速不変の原理がこれを要求しているように）、運動系中において測定したとき、光も速度 $V$ で伝播するという事実を方程式を用いて表す必要がある。時刻 $\tau = 0$ に $\xi$ が増大する方向に向けて出た光の場合には、次式が得られる。

$$\xi = Vt,$$

または

$$\xi = aV \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

しかし、測定が静止系中で行われる場合には、光ビームは系 $k$ の座標原点に対して速度 $V - v$ で運動する。その結果、次式が得られる：

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

この $t$ の値を $\xi$ に関する方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

他の2つの軸に沿って運動する光ビームについて検討すると、次式が見出される：

$$\eta = V\tau = aV \left( t - \frac{v}{V^2 - v^2} x' \right).$$

このとき、

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t, \quad x' = 0$$

である。したがって次式が得られる：

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y,$$

および

$$\xi = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} x.$$

$x'$ の代わりにその値を代入すると、次式が得られる：

$$\tau = \varphi(v)\beta \left( t - \frac{v}{V^2} x \right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z.$$

ここで

$$\beta = 1/\sqrt{1 - (v/V)^2}$$

であり、 $\varphi$ は今はまだ未知の $v$ の関数である。

運動系の初期位置および変数 $\tau'$ のゼロ点に関して何も仮定をしない場合には、これらの方程式の右辺に、追加定数をそれぞれ1個ずつ書き加える必要がある。

さて、もしこの主張が我々の仮定に従って静止系において成立するのであれば、運動系中で測定したとき、各光ビームは速度 $V$ で伝播するというのを、我々は証明しなければならぬ。光速度不変の原理が相対性原理と両立することを、我々はまだ証明していないからである。

時刻 $t = \tau = 0$ に、その時刻においては両方の系に共通の座標原点から球面波が送出され、 $K$ 系中を速度 $V$ で伝播するとしよう。この球面波が到達する点を $(x, y, z)$ とすると、次式が得られる：

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

この方程式を上記の変換公式を用いて変換すると、次式が得られる：

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 t^2.$$

このように、検討されている波は、運動系中で観測されたときにも、速度 $V$ で伝播する球面波である。このことにより、我々の2つの基本原理は両立することが証明された。

導出された変換公式は $v_y$ の未知関数 $\varphi$ を含んでいる。次に、この関数を決定しよう。

この目的により、さらにもう1つの3番目の座標系 $K'$ を導入しよう。この座標系は、系 $k$ に対し、自分の座標原点が $\Xi$ 軸に沿って速度 $-v$ で運動するように、 $\Xi$ 軸に平行に並進運動をしている。時刻 $t = 0$ に3つの全ての座標原点が一致し、また、 $t = x = y = z = 0$ のとき、系 $K'$ における時刻 $t'$ が0であるとしよう。 $x', y', z'$ を、系 $K'$ 中で測定された座標としよう。

我々の変換公式を2回適用すると、次式が得られる：

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right) = \varphi(v)\varphi(-v)t,$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)(\xi + vt) = \varphi(v)\varphi(-v)x,$$

$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\varphi(-v)y,$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\varphi(-v)z.$$

$x', y', z'$ と $x, y, z$ の関係式には時刻 $t$ は含まれていないので、系 $K$ と系 $K'$ は互いに対して静止している。それゆえ、 $K$ から $K'$ への変換が恒等変換でなければならないことは明らかである。したがって次式が得られる：

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

今度は、関数 $\varphi(v)$ の物理的意味を解明しよう。この目的により、系 $k$ の $H$ 軸のうち、点 $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ と点 $\xi = 0, \eta = l, \zeta = 0$ の間に横たわっている部分について検討しよう。 $H$ 軸のこの部分は、自軸に垂直に、系 $K$ に対して速度 $v$ で運動している棒となっている。この棒の両端は、系 $K$ 中では次の座標を持っている：

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0,$$

および

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

したがって、系 $K$ 中で測定された棒の長さは $l/\varphi(v)$ である。これにより、まさに関数 $\varphi(v)$ の物理的意味が解明された。実際、対称性に関する推論から、今や、静止系中で測定された自軸に垂直に運動するある棒の長さは、速度の大きさにものみ依存することが可能であり、速度の方向および符号には依存しないことが明らかになった。したがって、静止系中で測定された棒の長さは、 $v$ を $-v$ に置き換えても変化しない。これより、次式が導き出される：

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

または

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

この関係式および先に見出された関係式より、 $\varphi(v) = 1$ であることが導き出される。それゆえ、見出された変換公式は次式に移行する：

$$t = \beta(t - vx/V^2),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y, \quad \zeta = z.$$

ここで

$$\beta = 1/\sqrt{1 - (v/V)^2}$$

である。

---