

V. A. アレシケヴィッチ  
最新実験データに基づく特殊相対性理論の教授について

\*\*\*日本語版について\*\*\*

- \* 本訳文は, «Алешкевич В.А. О преподавании специальной теории относительности на основе современных экспериментальных данных / Успехи Физических Наук, 2012, Том.182, № 12, С.1301-1318» のロシア語からの全訳である。
- \* 原論文は [https://ufn.ru/ufn12/ufn12\\_12/Russian/r1212c.pdf](https://ufn.ru/ufn12/ufn12_12/Russian/r1212c.pdf) で入手することができる。
- \* 著者：ヴィクトル・アレクサンドロヴィッチ・アレシケヴィッチ  
(Виктор Александрович Алешкевич, Viktor Aleksandrovich Aleshkevich)
- \* 著者はモスクワ国立大学物理学部教授。経歴・業績については«Wikipedia, Алешкевич, Виктор Александрович»でネット検索するとロシア語版 Wikipedia の記事を読覧することができる。この記事は検索エンジンの自動翻訳により日本語で読むことができる。ただし, 記事中の「候補」という訳語は「準博士」に読み替える必要がある (Google の場合。2025 年 8 月閲覧)。
- \* «V.A. Aleshkevich, theory of relativity»でネット検索すると, 本論文の特徴に関する「AI による概要」(英文) が表示される (Google の場合。2025 年 8 月閲覧)。
- \* 訳者：吉田 正友
- \* 訳者のサイト：「物理の旅の道すがら」(<http://naturalscience.world.coocan.jp>)
- \* 日本語版公開：2025 年 8 月
- \* 訳文中の角括弧 [ ] 内は訳注である。

<p>この論文に対しては, S.ミーゼンがその著書『場の理論が相対性理論に取って代わる. 証明と帰結』において徹底的な批判を加えている。本書の邦訳が上記の訳者のサイトに掲載されているので, 是非参照されたい。</p>
--

## 方法論的覚書

## 最新実験データに基づく特殊相対性理論の教授について

V. A. アレシュケヴィッチ

特殊相対性理論における時空の性質の研究に対する新たな方法論的アプローチが提唱されている。このアプローチは、何よりもまず、加速器中で加速された相対論的粒子および宇宙線を用いた実験のおかげで 20 世紀に蓄積された、大量の実験的資料に基づいている。このようなアプローチは、相対論的效果は時空の基本的性質の発現であることを一目瞭然たる形で示しており、相対論はもっぱら光学現象とのみ関係しているという誤った理解に陥ることを回避することを可能にする。

## On special relativity teaching using modern experimental data

V.A. Aleshkevich

*Department of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University*

A new methodological approach to the study of relativistic space-time properties is proposed based on the 20th century's vast experimental research on relativistic accelerator and cosmic ray particles. This approach vividly demonstrates that relativistic effects are the manifestation of the fundamental space-time properties and refutes the false notion that relativity is only of relevance to light phenomena.

PACS numbers: 01.40.gb, **01.65.+g**, **03.30.+p** / DOI: 10.3367/UFNr.0182.201212c.1301

Bibliography — 14 references / Received 23 January 2012, revised 16 February 2012

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **182** (12) 1301 ± 1318 (2012) / *Physics ± Uspekhi* **55** (12) (2012)

## 目次

1. 序論 .....	3
2. ローレンツ変換 .....	4
3. 相互作用の限界伝播速度 .....	5
4. 時間間隔の測定 .....	6
5. 運動する時計の歩度の遅れ .....	8
6. 運動物体の縦方向のサイズの収縮 .....	11
7. 運動する一群の時計の歩度の同期性の破れ .....	12
8. 非同期性と等価原理 .....	15
9. ミンコフスキー空間 .....	18
10. 速度の変換 .....	20
11. ビーム衝突型加速器 .....	21
12. 粒子ジェット .....	22
13. 恒星の光行差 .....	23
14. 加速度の変換 .....	24
15. 共動基準系 .....	25
16. 双子のパラドックス .....	28
17. 結論 .....	31
文献一覧 .....	31

## 1. 序論

その創造から 100 年以上の時が経過した特殊相対性理論は、物理学の最も理解し難い分野の 1 つである。時空、亜光速運動の運動学 [kinematics] および動力学 [dynamics] に関するイメージの捉え難さは、教授のための実験的基盤が存在せず、また、そのような速度での運動の観測が不可能であることと関係しているように思われる。普通の平凡な実験は相対論的効果の真実性に疑いを抱かせ、それらの効果の不承認さえ引き起こしている。

特殊相対性理論の伝統的な叙述法は、光速度不変の公準および相対性原理に基礎をおいている。20 世紀初頭においては、このようなアプローチが、特殊相対性理論の創造者たちが持つ、理論の裏付けのための唯一の論拠となっていた。それゆえ、相対性理論に関する知識を初めて得るとき、ローレンツの公式では光速度が基本量となっていることから、相対論的効果はもっぱら光信号とのみ関係を持っているという誤った理解が生じることが稀ではない。さらに、特殊相対性理論の基礎について叙述する際、亜光速で運動する抽象的な時計と物差しの「利用」に頼り、現実の条件下では実施不可能な思考実験がしばしば援用されていることにより、状況はますます悪化している。

相対論の基礎に関する知識を初めて得る際、限界速度に匹敵するきわめて大きい速度で運動することができるような時計を想像しなければならないことにも問題がある。しかも、そのような時計は典型的な実験距離  $l \approx 1 \text{ m}$  を時間  $t = l/c \approx 3 \text{ ns}$  の間に通過する。それゆえ、その時計は 1 ns のオーダーの時間間隔を測定する可能性を与えなければならない。

また、「物差し」の長さのローレンツ収縮（そして物差しがどのように見えるか？）について語る必要はない。E. テイラーと J. ホイラーの有名な著書 [1] において、読者は、10 m の物置小屋の中に収められている 20 m のポールが描かれている図を半信半疑で凝視する。

時折、その速度が一般に受け入れられている真空中における光速度の値を超えている運動物体の検出に関する報告が現れている。相変わらず、その著者たちがマイケルソン・モーリーの実験におけるインターフェログラムの計算における「誤り」を見出している「学術論文」が出版され、エーテルの存在が「証明」され、それによって一般相対性理論が誤りであることが「証明」されている。

まだごく最近（今から 25–30 年ほど前）、相対性理論における基本概念である「質量」および「エネルギー」に関する議論が続けられていた。これらの概念に対する最も首尾一貫した論理的解釈は L.B. オクニ [またはオクン, Lev Borisovich Okun'/Okun] の論文 [2] で与えられていると思われる。

この覚書の筆者は、M.V. ロモノソフ記念モスクワ国立大学物理学部における長年の教授経験から、特殊相対性理論の基礎の叙述は、20 世紀に蓄積された光速度の測定とはまったく無関係な大量の実験結果に基づく、新たな方法の導入を必要としているという深い確信に達した。それは、何よりもまず、加速器中で加速される相対論的粒子および宇宙線を用いた実験 [3] である。シンクロトロン放射の運動量の伝播速度 [4] および光源の運動速度に対する光速度の依存性 [5] の直接測定に関する最近の実験も含め、宇宙機上、特に、GPS (Global Positioning System) および GLONASS [Global Navigation Satellite System] で使用されている衛星上に設置された原子時計を用いた実験もまた、特殊相対性理論の妥当性の証明の根拠を強めていることは疑いない。光速度は、この方法においては相互作用の伝播の限界速度を決定する世界定数として登場している。

本論文の目的は、特殊相対性理論における時空の性質の研究に対する新たな方法論的アプローチの記述である。相対論的動力学の問題は、上記の論文 [2] を含め、多数の教科書や学習参考書において十分に叙述されているので、時間および座標の原理的測定方法に集中し、また、相対論的速度での運動時における運動学の枠内に留まることが有益である。

この覚書の執筆に際しては、一般に知られている事実や方法的アプローチについて再述することを完全に避けるという課題は立てられなかった。互いに補完し合う相異なる方法が、特殊相対性理論の基礎の理解の深化を必ず促進してくれることであろう。本論文に引用されている資料は、最も広い読者層向けに一部書き直されている。

## 2. ローレンツ変換

特殊相対性理論の創造の歴史は、少々本題から離れて歴史の話をするに値する。

1898年、H.ポアンカレは同時性の問題をテーマとする論文「時間の測定」[6]を哲学雑誌に発表した。この論文には、特殊相対性理論の事実上全ての主要命題が述べられている。ポアンカレの近い友人でチューリッヒ工科大学教授のH.ミンコフスキーが彼の論文を読み、自分の学生であるA.アインシュタインにこの論文を研究するよう勧めた。それから約7年後の1905年、アインシュタインは論文「運動物体の電気力学について」[7]を発表した。そこでは特殊相対性理論がその現在の形で述べられていた。しかし、ポアンカレの論文への言及はそこにはなかった。

周知のように、H.A.ローレンツは、ある慣性基準系から別の慣性基準系に移行したとき、そこではマクスウェル方程式が不変に保たれるような座標および時間の変換を見出そうと試みていた。これらの変換は1904年に彼によって得られた。ミンコフスキーは講義を行っているときにこれらの変換における1つの誤りを発見し、講義要録の出版の際にその誤りを訂正した上で、これらの変換をローレンツ変換と名付けた。

ローレンツは、基準系Kに対してx軸方向（それ以外の軸は同方向）に速度Vで運動している基準系K'に移行したとき（図1）、何らかの事象の座標および時間は、次の関係式に従って変化することを突きとめた：

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).\end{aligned}\tag{1}$$

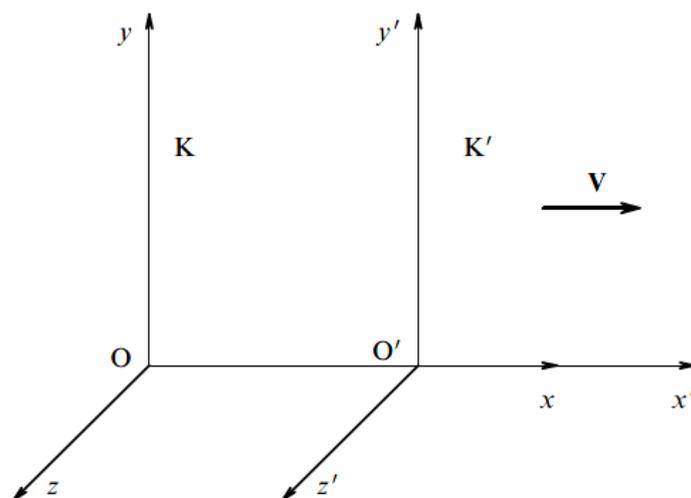


図1. 座標系K'の実験室系Kに対する速度Vでのx軸方向への運動

それより後の1905年、ポアンカレがこれらの変換をローレンツ変換と名付け、これらの基本的性格を示した。次に、1905年にアインシュタインが光速度不変および相対性原理に関する公準に基づいてこれらの変換を得た。

スケール因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2)$$

はローレンツ因子という名称を与えられた。ここで $\beta = V/c$ である。速度が小さいとき ( $V \ll c$ )、また座標の値が小さいとき ( $x \ll tc^2/V$ )、公式(1)がガリレイ変換に移行することは明らかである。

相対論的速度 ( $V \leq c$ ) のとき、ローレンツ変換はガリレイ変換と著しく異なったものとなり、まったく新たな効果をもたらす。特に、ローレンツ変換における因子 $\gamma$ の存在は時間の遅れおよび長さの収縮を「もたらし」、 $(V/c^2)x$ 項は相異なる空間点に配置されている時計の歩度の同期性の破れの原因をなしている。

(1)を変数 $x, y, z, t$ について解くと、ローレンツ逆変換が得られる：

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{aligned} \quad (3)$$

相対性原理を用いると、逆変換は正変換からも得ることができる。相対性原理によれば、系 $K'$ に対する系 $K$ の速度は $V$ に等しい。それゆえ、(1)において速度 $V$ の符号を変え、系の全ての等式の左辺における変数に付いているプライムを除去し、右辺における変数にプライムを付ければ、関係式(3)が得られる。(1)より、 $V = 0$ のとき、 $\gamma$ の値は $\gamma = 1$ となり、 $V \rightarrow c$ のとき、因子 $\gamma$ は $\gamma \rightarrow \infty$ となることが分かる。また、速度 $V$ が光速 $c$ と等しくなること、あるいは光速を超えることができないことも明らかである。なぜなら、その場合には、分母がゼロになったり、根号内で負数が得られたりするからである。

物理的観点から見ると、 $V < c$ という条件は、その速度が真空中における光速の値に達するような、あるいは光速を超えるような物体は見出されない（そして運動基準系はそのような物体とのみ関係付けられることができる）ということの意味している。相互作用の限界伝播速度も存在する。

### 3. 相互作用の限界伝播速度

20世紀に行われた実験の結果から出発すれば、相互作用の伝播速度の値は有限であるという結論に到達するのはまったく困難なことではない。実際、全ての加速器において、荷電素粒子のエネルギーが増大していくとき、それらの速度は $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ という限界に向かっていく。その速度がこの限界を超えた粒子を観測した者は誰もいない。例えば、SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) (アメリカ) の線形加速器中で、電子は電場中におけるポテンシャル差 $\Delta U = 2.3 \times 10^{10} \text{ V}$ の領域を通過する。ニュートンの古典力学によれば、そのような電子の加速路終端における速度は $v = 9.9 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 、すなわち上記の限界の約300倍(!)とならなければならない。しかし、加速路終端における電子の実際の速度は、限界値 $c$ より $0.075 \text{ m s}^{-1}$ だけ小さい。

宇宙線中では、 $E \approx 5 \text{ J}$ のエネルギーを持つ、陽子と推定される粒子が見受けられる。そのような粒子の間接的に推定される速度もまた、途方もなく大きな計算値 $v = \sqrt{2E/m} \approx 2.4 \times 10^{14} \text{ m s}^{-1}$  (!) に反し、限界値 $c$ を超えていない。

粒子の限界速度 $c$ は真空中における光(光子流束)の速度と一致していることに注目しよう。後者は何度も測定されており、現在は $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$ という光速の値が採用されている。

1987年2月24日、宇宙飛行士たちがきわめて稀な事象、すなわち、我々の銀河系の隣りのさほど大きくない銀河である大マゼラン雲内における超新星爆発の閃光を観測した。それは、ケプラーの星のとき(1604年)以後において最初の、肉眼で見ることのできる最初の超新星であった。大マゼラン雲から銀河系までの距離は約 $1.6 \times 10^{21}$  mである。閃光が発生した時刻から地球上でそれが記録された時刻までの間に、時間 $t \approx 5.4 \times 10^{12}$  sが経過したことは明らかである。閃光が記録されるより $\Delta t \approx 10^4$  s前に、この爆発から出たニュートリノ流束が記録されていた。理論によれば、ニュートリノの形成は、閃光の発生よりそれと同じ時間だけ前に生じる。この観測結果は、ニュートリノの速度 $c_\nu$ と光速度の差は、相対誤差 $|c_\nu/c - 1| < 10^{-8}$ の範囲内にあることを意味している。

このように、全ての最新の測定結果は、粒子には限界速度が存在するという結論を裏付けている。

現代物理学では、基本相互作用は、それに該当する粒子の交換と解釈されている。例えば、核子(陽子および中性子)の内部におけるクォーク間の力の相互作用は、グルーオン—力の相互作用の伝達粒子—の交換によって行われる。いわゆる電弱相互作用はベクトル粒子の交換の結果である。

相互作用を粒子の交換と解釈すると、粒子には限界速度 $c$ が存在するという事実から、相互作用の伝播速度に対する制限も導き出される。したがって、次の主張はまったく自然な主張である：基本相互作用の伝播速度、あるいはいわゆる信号速度は限界 $c \approx 3 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>を超えない。

#### 4. 時間間隔の測定

小さい時間間隔を測定するために、不安定粒子(パイオン、ケイオン、ミューオンその他)の崩壊現象を利用することができる。大速度で運動するそのような粒子は、加速器における陽子とターゲット原子核との相互作用の結果形成される。

不安定粒子の発生の主要段階は次のとおりである。まず最初に、陽子を加速する必要がある。陽子が空気の原子核と衝突するのを回避するため、陽子は真空チャンバー(残留圧力約 $10^{-9}$  Torr)一直径約10 cmの管—の中で加速される。事実上光速度と区別不可能な速度まで加速される時間(加速サイクル)—それはおよそ数秒間である—の間に、陽子は膨大な距離を進むので、当然、管はリング型に作る必要がある。リングの半径は数 km に達する。

陽子が円周に沿って運動するようにするためには、陽子に対して磁場が作用しなければならない。磁場の大きさは加速過程の間に数テスラまで増大する。磁場を創出する磁石(最近では超伝導合金からなる装置が用いられており、超伝導合金は液体ヘリウムの温度まで冷却される)が、リングの外周に沿って配置されている。リングのいくつかの区間には強力高周波電場の発生源が配置されている。陽子がそれらの区間を何回も通過した後には、その電場が陽子を $10^{12}$  eVのオーダーのエネルギーまで加速させる。そのためには、陽子は、当該区間が高周波電場の位相にあるときにそこに入らなければならない。

陽子が加速されるときはロシアの物理学者 V.I. ヴェクスレル[Vladimir Iosifovich Veksler]によって定式化された。それらの条件によれば、陽子はリングに沿って一様に分布するのではなく、クラスター状に集中していなければならない。クラスターの縦方向のサイズは加速器の種類によって異なり、数 m から数 cm までの幅があり、横方向のサイズは数  $\mu$ m である。1 個のクラスター中の陽子数は何十億個にも達することがあり、リング中のクラスター数には数十個から数千個までの違いがある。特殊な磁石によって加速された陽子はターゲットに向かって行く(図 2)。

それらの陽子のうち 1 個のみとターゲットの何らかの原子核 1 個との相互作用の結果、

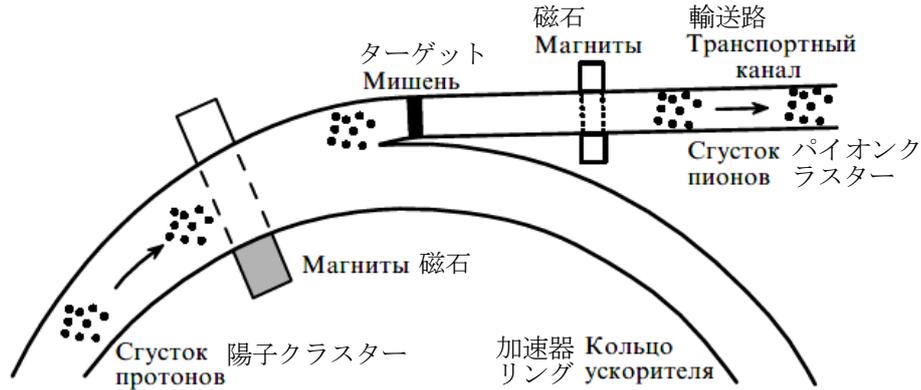


図 2. 加速器リングの 1 部分における陽子クラスターの運動の概略図

多数（相互作用 1 回当たり  $10-100$  個）の不安定 2 次粒子（主にパイオン，ケーオンその他）が形成される。それらの 2 次粒子は磁場によって種類別および速度別に選別され，各種の輸送路に送られる。不安定粒子の場合には，これらの輸送路は崩壊路と呼ばれることがある。陽子はターゲットにクラスターの形で当たるので，不安定粒子もクラスターの形で形成される。それらのクラスターは輸送路中で一定速度で運動している。最も一般的特徴で示した各種不安定粒子のビーム（クラスター列）の形成スキームはこのようものである。

特に，大型ハドロン衝突型加速器では，そのそれぞれが  $10^8$  個のオーダーの陽子を含んでいるクラスターが形成され，速度  $V = 0.999999991c$  まで加速される。クラスターの長さは  $3$  ないし  $5$  cm，横方向のサイズは約  $16 \mu\text{m}$  である。加速器のリング中には同時に約  $3000$  個のクラスターが存在し，それらは  $1$  秒間に  $6 \times 10^8$  回の衝突を受ける。輸送路の長さを  $27$  km とすると，クラスター間の平均距離は約  $90$  m となる。

崩壊現象は時間測定のために利用することができる。基準系  $K'$  を運動粒子（1 個の粒子クラスター）と結び付けよう。この基準系を固有基準系と呼び，その中における時間  $t'$  を固有時間と呼ぶことにしよう。加速器および輸送路がその中で静止している実験室基準系  $K$  中における時間を  $t$  で表そう。1 個の粒子が時間  $dt' \ll \tau$  の間に崩壊する確率  $dP$  は次の比によって決定される：

$$dP = \frac{dt'}{\tau}. \quad (4)$$

ここで定数  $\tau$  は粒子の（粒子が静止している系中における）平均固有寿命である。この定数は，各種の実験で測定することができ，また，放射性崩壊の法則に基づいて計算することもできる。各種の不安定粒子に関するこの定数の値には，きわめて幅広い範囲（ $10^{-16}$  s から  $10^3$  s まで）の違いがある。 $N(t')$  個の不安定粒子からなるクラスターについて検討すると，時間  $dt'$  の間におけるその数の変化  $dN$  は，粒子数と 1 個の粒子の崩壊確率の積によって決定される：

$$dN = -N(t')dP = -N(t')\frac{dt'}{\tau}. \quad (5)$$

この式の中の負の符号は粒子数が減少することを意味している。方程式(5)を積分し，任意の時刻  $t'$  におけるクラスター中の粒子の平均数  $N(t')$  を決定することは容易である：

$$N(t') = N(0) \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right). \quad (6)$$

ここで  $N(0)$  は  $t' = 0$  のときにおけるクラスター中の粒子数である。

値  $N(0)$  および  $N(t')$  の測定値は，それとは逆の課題，すなわち(6)から固有時間  $t'$  を計算するという課題を解くことを可能にする：

$$t' = \tau \ln \frac{N(0)}{N(t')} . \quad (7)$$

ランダムな崩壊現象における揺らぎが時間測定の精度に著しい影響を与えないようにするためには、大きな粒子数 $N$ を持つクラスターについて検討する必要がある。

したがって、既知の粒子数 $N(0)$ からなるクラスターを形成し、崩壊の結果減少していくその数 $N(t')$ を決定すれば、関係式(7)が、系 $K'$ における固有時間 $t'$ を測定することを可能にする。すなわち、不安定粒子のクラスターは亜光速で運動する時計の機能を果たすことができる。

### 5. 運動する時計の歩度の遅れ

様々な時刻に、ある運動する時計の示度を別の静止した時計の示度と比較することができることは明らかである。それゆえ、運動する時計の歩度の検査を次のやり方で行うことができる。

実験室基準系 $K$ 中に、この系における時間 $t$ を測定する1組の同期化された静止した時計が存在するとしよう(第7節の図3参照)。これらの時計は、輸送路に沿って $x$ 軸上に相互間の距離 $l_0 = \text{const}$ で配置されている。基準系 $K'$ を、この輸送路中を一定速度 $V$ で運動する粒子クラスターと結び付けよう。両方の系の座標軸は同方向を向いており、時刻 $t = t' = 0$ において、それらの座標原点は一致しているとしよう。番号 $i$ が付けられているその次の静止した時計のそばをクラスターが通過するとき(この時刻を $i$ 番目の事象と呼ぼう)、その系は次の時刻を示すことになる：

$$t_i = \frac{L_i}{V} . \quad (8)$$

ここで $L_i = il_0$ ,  $i = 1, 3, 3, \dots$ である。

クラスターと結び付いている系 $K'$ においては、それらの事象の時刻は $t'_i$ である。1つの具体的な値 $t'_i$ を(7)から決定するためには、粒子数 $N(0)$ および $N(t'_i)$ の測定値が必要であることは明らかである。このように、特定の事象に関する実験室時計の示度を知り、それに対応する時刻における運動するクラスター中の粒子数を測定することにより、運動する時計の歩度が静止した時計の歩度と異なっているか否かを決定することができる。

ジュネーブの欧州原子核研究機構(CERN)で行われた多数の実験の1つにおいて、長さ $L_0 = 100 \text{ m}$ の輸送路中に $N(0) = 1.5 \times 10^7$ 個(測定結果による)の正に荷電した超相対論的パイオンが送り込まれた。これらのパイオンのローレンツ因子は $\gamma = 857$ であった。これらのパイオンの速度は $c$ の値と6桁までの精度で一致している。これらのパイオンによる輸送路の通過時間は次のとおりである：

$$t = \frac{L_0}{c} = \frac{10^2}{3 \times 10^8} \text{ s} \approx 3.33 \times 10^{-7} \text{ s} . \quad (9)$$

パイオンは輸送路中でミューオンとニュートリノに崩壊する可能性がある。それゆえ、出現したミューオンの数 $N_\mu$ に基づき、崩壊したパイオンの数を決定することができる。測定結果は、輸送路の終端において $N_\mu = 2.27 \times 10^5$ であることを示した。したがって、輸送路の終端におけるパイオン数は $N(t') = N(0) - N_\mu = 1.477 \times 10^7$ である。パイオンの場合には、固有寿命時間は $\tau = 2.56 \times 10^{-8} \text{ s}$ であるから、 $t'$ に関して公式(7)から次の推定値が得られる：

$$t' = \tau \ln \frac{N(0)}{N(t')} = 3.90 \times 10^{-10} \text{ s} . \quad (10)$$

(9)および(10)より、運動する時計の歩度の遅れを特徴付ける比 $t/t'$ に関して、次の値が見出される：

$$\frac{t}{t'} = 854. \quad (11)$$

この値は $\gamma = 857$ と誤差 0.35%で一致している。したがって、

$$\frac{t}{t'} = \gamma, \quad (12)$$

あるいは時間間隔に関しては

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma \quad (13)$$

とみなすことができる。最後の関係式はしばしば次の形で表される：

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t. \quad (14)$$

世界の多数の国の加速器、特にロシア（プロトヴィノの高エネルギー物理学研究所）、アメリカ（シカゴのフェルミ国立加速器研究所）および CERN の最大級の加速器で行われた膨大な数の実験では、輸送路の長さ $L_0$ には数 m から数 km まで、ローレンツ因子 $\gamma$ には 1桁の数から数千までの違いがあった。それら実験は様々な不安定粒子を用いて行われ、不安定粒子の固有寿命にはきわめて大きな違いがあった（ $10^{-16}$  s から  $2.2 \times 10^{-6}$  s まで）。(13)の依存関係からの逸脱が検出された実験は 1 つもなかった。

事実上、公式(13)が任意の不安定粒子用の輸送路の設計の際の技術的計算の基礎となった。蓄積リング中におけるミューオンの崩壊について研究していた F.コンブリー [F. Combley], F.ファーリー [F. Farley] および E.ピカソ [E. Picasso] (CERN) の精密実験において、関係式(13)の満足における相対誤差は  $(0.9 + 0.4) \times 10^{-3}$  であったこと [8] に注目しよう。

歴史的には、(13)の検証に関する最初の実験は、アメリカの B.ロッシによって行われた実験 (1939–1941 年) であった [9]。それらの実験では、大気中におけるミューオン（当時、ミューオンはメゾトロンと呼ばれていた）の伝播時におけるミューオン数の減少が研究された。大気中の大高度における宇宙線と原子核の相互作用の結果、パイオンが生まれる。それらのパイオンはかなり急速にミューオンとニュートリノに崩壊する。ミューオンの固有寿命は相対的に短い： $\tau \approx 2.2 \times 10^{-6}$  s。もし実験室時計で測定されたミューオンの寿命 $t_\mu$ がそれらの固有寿命と等しいとすれば、それらは地球に向かう方向に沿って、次の平均距離を進行する：

$$\lambda_0 = ct_\mu = c\tau \approx 660 \text{ m}. \quad (15)$$

大気の上部のある点におけるミューオン数を $N(0)$ としよう。ミューオンは事実上光速で運動するのであるから、ミューオンが地球に向かう方向に沿って時刻 $t$ までに進行した距離 $l$ は次のようになる：

$$l = ct. \quad (16)$$

もし時間の遅れがないとすると（すなわち、等式 $t' = t$ が満たされるとすると）、(6)より、(15)および(16)を考慮することにより、距離 $l$ に対するミューオン数の次の依存関係が得られるはずである：

$$N(l) = N(0) \exp\left(-\frac{tc}{\tau c}\right) = N(0) \exp\left(-\frac{l}{\lambda_0}\right). \quad (17)$$

すなわち、ミューオン数は、距離 $\lambda_0 = 660$  m 上において $e$ 分の 1 に減少するはずである。遅れが生じている場合には ((12)参照)、(17)の代わりに次式が見出される：

$$N(l) = N(0) \exp\left(-\frac{l}{\gamma\lambda_0}\right). \quad (18)$$

すなわち、 $e$ 分の 1 への減少は距離 $\lambda = \gamma\lambda_0$  上において生じる。これは $\lambda_0$ より著しく ( $\gamma$ 倍) 大きい。ミューオン数の測定はシカゴ（海拔高度 180 m）およびコロラド州の山上の高度

1600, 3240 および 4300 m において行われた。それらの測定値は、数 km のオーダーの距離上におけるミューオン数の  $e$  分の 1 への減少を示した。行われたミューオンのエネルギーの推定から、ローレンツ因子は  $\gamma \approx 5$  であることが導き出され、これより距離  $\lambda = \gamma \lambda_0 \approx 3$  km が得られた。これは、上記の直接測定の数値と整合している。

宇宙線に関する最新研究は、公式(13)はローレンツ因子の値がきわめて大きいとき ( $\gamma \approx 10^{10} - 10^{11}$ ) にも妥当することを示している。

大気中の高高度における宇宙放射線の 1 次粒子と原子核の相互作用においては、荷電パイオンその他の粒子だけでなく、中性パイオンも生まれている。それらの固有寿命はきわめて短い： $\tau \approx 0.8 \times 10^{-16}$  s。それゆえ、そのような中性パイオンは事実上瞬時に崩壊する。しかし、宇宙線のエネルギーがきわめて高いときには、それらのパイオンのローレンツ因子は上記の値に達する可能性があり、それらの数が崩壊の結果  $e$  分の 1 に減少する距離  $\lambda$  は大きくなる：

$$\lambda = \gamma \tau c \approx 2.4 \times 10^3 \text{ m}. \quad (19)$$

この場合には、中性パイオンは大気中で原子核と相互作用する時間を持っている。間接的測定は、実際、超高エネルギー領域においては中性パイオンは崩壊せず、原子核と相互作用することを示している。すなわち、公式(13)は  $\lambda \sim 10^{10}$  の場合にも満たされる。

精密な原子時計の出現後、時間の遅れに関する公式(12)を小さい速度  $V$  のときにも検証する可能性が生まれた。例えば飛行機で飛行する場合には、そのとき  $V \approx 10^3 \text{ km h}^{-1}$ ,  $\beta = V/c \approx 10^{-6}$  であり、それに対応して、 $\gamma$  は 1 をきわめて小さい値だけ、およそ  $10^{-12}$  だけ超える。

J.ヘイフリーと R.キーティングの実験 [10] では、定期便旅客機の機上に 4 台のセシウム原子時計が搭載されていた。飛行機は最初は東方向に、次に西方向に世界一周飛行を行った。飛行後に、「飛んだ」時計の示度と、アメリカ海軍天文台に残されていた同型の時計の示度との比較が行われた。飛行機が東方向に飛行した場合には、飛行機上の時計は地上の時計より  $(59 \pm 10)$  ns だけ遅れていた。飛行機が西方向に飛行した場合には、地上の時計の方が  $(273 \pm 70)$  ns だけ進んでいた。公式(12)の検証の誤差は 10% であった。これらの値の理論的推定値は、それぞれ  $(40 \pm 23)$  ns および  $(275 \pm 21)$  ns であった。それより後の C. アレーらの実験 (1980 年) [11] では、誤差は 1% まで減少していた。

したがって、ローレンツ因子  $\gamma$  の 1 から  $10^{11}$  までの変化の間隔に関する実験データの総体から、次の結論を下すことができる：ある運動する時計の歩度は、静止基準系の様々な点に配置されている一群の時計の示度と比べると、 $\gamma$  分の 1 に遅れる。

運動する時計の歩度のこのような遅れは、公式(13)はローレンツ変換から導き出されるため、ローレンツの遅れという呼び名を与えられた。実際、実験室系中で運動する時計に対しては、その時計がその中で静止している系中において記録された座標値  $x'_w = \text{const}$  が対応している。それゆえ、実験室系中に 2 つの時刻  $t_1$  および  $t_2$  に関して、(3)に基づいて次式が得られる：

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma \left( t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_w \right), \\ t_2 &= \gamma \left( t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_w \right). \end{aligned} \quad (20)$$

ここで  $t'_1$  および  $t'_2$  は固有時間の当該の時刻である。(20)の 2 番目の等式から 1 番目の等式を引き、記号  $\Delta t = t_2 - t_1$  および  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  を導入すると、関係式(13)に到達する。

このテーマに関する考察の締めくくりとして、高度約 20000 km を速度  $V = 4000 \text{ m s}^{-1}$  で運動する航法衛星に搭載されている原子時計は、1 日 ( $\Delta t = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$ ) の間に次の時間だけ遅れることに注目しよう：

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right) \Delta t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c}\right)^2 \Delta t = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 10^{-10} \times 8.64 \times 10^4 \text{ s} = 7.7 \mu\text{s}.\end{aligned}$$

## 6. 運動物体の縦方向のサイズの収縮

物体がその中で静止している基準系は、その物体にとっての固有基準系と呼ばれている。そのような系の中で測定された物体（棒、物差し）の長さは、固有長と呼ばれている。静止物体の長さを測定することは難しい問題ではない。例えば、実験室基準系  $K$  の中に、 $x$  軸に沿って配置された静止した棒があるとしよう。棒の長さ  $L_0$  は、棒の右端( $r$ )の座標  $x_r$  と左端( $l$ )の座標  $x_l$  の差として決定される：

$$L_0 = x_r - x_l. \quad (21)$$

このとき、これらの座標が実験室基準系の時計によってどの時刻  $t$  に測定されるかは、どうでもよい。

これに代わる長さの決定方法も可能である。その長所はこの先で明らかになる。加速器の長さ  $L_0$  の輸送路をある種の棒として表現しよう。粒子クラスターが一定速度  $V$  で輸送路の左端から右端へ運動するとしよう。このとき、そのクラスターが実験室系の時計による時刻  $t_l$  に棒の左端と、時刻  $t_r$  に右端と並んだとすると、輸送路（簡単のため、以下これを棒と呼ぼう）の固有長  $L_0$  は、クラスターが通過した距離と等しくなる：

$$L_0 = V(t_r - t_l). \quad (22)$$

運動する物体（棒）の長さ  $L$  を測定する際には、その両端の座標は、その測定がその中で決定される系の時計によって同一の時刻  $t$  に測定されるものとする必要がある。それゆえ、次式のようになる：

$$L = x_r(t) - x_l(t). \quad (23)$$

高速運動する棒の例とすることができるのは、粒子クラスターと関係付けられる基準系に対して亜光速で運動する加速器の輸送路である。この場合には、輸送路の長さ

$$L = x'_r(t') - x'_l(t') \quad (24)$$

は、同一の時刻  $t'$  に記録された座標  $x'$  によって決定される。ところが、公式(23)または(24)による長さの決定はきわめて困難であることが容易に分かる。なぜなら、その長さを測定しようとしている運動する棒の両端のそばに、予め時計を設置しておかなければならないからである。運動法則の利用に基づく代替的方法（公式(22)）はそれとは別問題である。基準系  $K'$ （粒子クラスターと関係付けられる基準系）中において、最初に時刻  $t'_l$  に棒の左端、次に時刻  $t'_r$  に棒の右端がクラスターと並ぶとすると、運動する棒の長さは次のようになる：

$$L = V(t'_r - t'_l). \quad (25)$$

時刻  $t'_l$  および  $t'_r$  を評価するために公式(25)を実際に利用する際には、粒子クラスターが輸送路に入る時刻およびそこから出る時刻におけるクラスター中の粒子数を測定する必要がある。

(25)と(22)の比較から、運動物体の長さ  $L$  は固有長  $L_0$  と異なっていることが直ちに明らかになる。時刻の差を  $\Delta t = t_r - t_l$  および  $\Delta t' = t'_r - t'_l$  と表すと、運動する時計の歩度の遅れを考慮することにより、運動物体の固有長  $L_0$  と長さ  $L$  の間の関係式が得られる：

$$\frac{L_0}{L} = \gamma. \quad (26)$$

こうして我々は次の結論に達する：運動物体の縦方向のサイズは $\gamma$ 分の1に収縮する。

例えば上記 [第5節] で検討した CERN における実験においては、パイオンクラスターの運動の固有時間は $t' = 3.90 \times 10^{-10}$  sであった ((10)参照)。このとき、運動する棒 (輸送路全体) の長さ $L$ に関して次の値が得られる：

$$L = Vt' \approx 11.7 \text{ cm}. \quad (27)$$

これは $L_0$ の857分の1である。

運動物体の縦方向のサイズの収縮はローレンツ収縮と呼ばれている。なぜなら、これもまたローレンツ変換から導き出されるからである。実際、物体が実験室基準系中で静止しているとすると、このとき、ローレンツ逆変換により、物体がそれに対して運動している系 $K'$ 中における同一の時刻 $t'$ に関して、次式が得られる：

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'), \quad (28)$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'). \quad (29)$$

距離を $L_0 = x_2 - x_1$ および $L = x'_2 - x'_1$ と表そう。(28), (29)より $L_0/L = \gamma$ が導き出される。これは(26)と一致している。

運動する物体の横方向のサイズは変化しない。このような結論は対向ビームを用いた加速器実験から下すことができる。2個の陽子クラスターが互いに対向方向に運動しているところを想像しよう。陽子の全衝突数を決定しよう。高エネルギーの場合には、粒子のクーロン相互作用は無視することができる。核力については、核力は粒子半径と比較可能な距離においてのみ有効である。それゆえ、この場合には、陽子は有限な半径を持つ球として検討することができる。

2個の球が衝突するのは、それらの中心間の距離が、それらの半径の和 $r_1 + r_2$ を超えないときのみであることは明らかである。この和が、いわゆる相互作用断面積 $\sigma = (r_1 + r_2)^2$ を決定する。それらの球が半径 $R$ の管の中で運動しており、それらの管内部における分布がランダムである場合には、1回の衝突の確率は $P = (r_1 + r_2)^2/R^2$ である。クラスター中に陽子が $n$ 個ずつ含まれている場合には、全衝突数が次のようになることは明らかである：

$$N = n^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{R^2}. \quad (30)$$

もし粒子の横方向のサイズ (半径 $r_1$ および $r_2$ ) が運動時に変化するとすれば、実験における全衝突数は(30)の推定値とは異なったものになるはずである。このことは生じていないのであるから、運動物体の横方向のサイズは不変に保たれるという結論を下すことができる。このことは、その諸軸が運動方向に対して垂直な座標に関するローレンツ変換からも導き出される。

こうして、我々は次の結論に至る：運動物体の横方向のサイズは不変である。

## 7. 運動する一群の時計の歩度の同期性の破れ

ローレンツ変換から導き出されるように、系 $K$ 中にある観測者は、系 $K'$ 中に配置されている、系 $K$ に対して運動する一群の時計の歩度が同期していないこと、また、その逆のことに気付く。

この非同期性を定量的に評価するため、加速器の輸送路中を速度 $V$ で運動している粒子クラスターの例 (図3) に取り組もう。

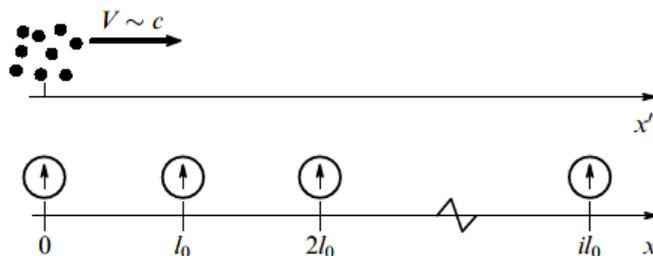


図 3. 加速器の輸送路に沿って等距離に配置されている同期化された時計に対する粒子クラスターの運動の概略図

その輸送路中には、互いに等しい間隔 $l_0$ をおいて配置された、同期化された複数の時計が存在しており、それらの時計は、最初のクラスター時計<sup>〔訳注〕</sup>が座標原点に存在している時計のそばを飛び過ぎるとき、同一の時間 $t = 0$ を示しているとしよう。その瞬間にその時計によって示される固有时间もゼロに等しいと取り決めることができる： $t' = 0$ 。クラスター時計が番号 $i$ が付けられている実験室時計のそばを通過していくとき、後者が時間 $t_i$ を示すことは明らかである（(8)参照）。

クラスターと結び付いている系 $K'$ 中においては、実験室時計間の距離は、ローレンツ変換の結果次の値となる：

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (31)$$

それゆえ、系 $K'$ 中においては、その事象は、クラスター時計によれば次の時刻に生じなければならない：

$$t'_i = \frac{il}{V} = \frac{il_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{V} = \frac{L_i \sqrt{1 - \beta^2}}{V}. \quad (32)$$

系 $K'$ 中においては、 $i$ 番目の時計はクラスターに対して対向方向に速度 $V$ で運動している。系 $K'$ 中にある観測者の視点から見ると、運動する実験室時計の歩度は $\gamma$ 分の1に減少しなければならない。それゆえ、この観測者は、系 $K$ の時計によれば、検討されている事象は次の時刻に生じるであろうと予想することができる：

$$t_i^{\text{exp}} = \frac{t'_i}{\gamma} = \frac{L_i(1 - \beta^2)}{V}. \quad (33)$$

予想される時間 $t_i^{\text{exp}}$  (33)と実際の時間 $t_i$  (8)の間の差は、次の唯一のやり方で解釈することができる：系 $K'$ 中で運動する番号0の実験室時計と番号 $i$ の実験室時計は同期していない。それらの時計の示度の差 $\delta_i$ は次のとおりとなる：

$$\delta_i = t_i - t_i^{\text{exp}} = \frac{L_i}{V} - \frac{L_i(1 - \beta^2)}{V} = \frac{L_i \beta^2}{V}. \quad (34)$$

系 $K'$ 中にある観測者の視点から見ると、番号 $i$ の時計は、番号0の時計によって記録される時間より遅い時間を示している。(34)によれば、示度におけるこの差は、時計の間の距離がより大きいほど、より大きくなる。

上記の互いに対して運動する時計の歩度の遅れ、それらの歩度の同期性の破れ、および運動する時計の間の距離の収縮の図解を図4に示す。この図では、(四角囲みの数字で)番号付けされた(円で示された)実験室時計が、輸送路(実験室系 $K$ の $x$ 軸)に沿って互いに距離 $l_0 \approx 30$  mをおいて設置されている。この輸送路に沿って(楕円で囲まれた)クラスター時計が相対論的速度で運動しており、この速度のとき、 $\gamma = 10$ である。クラスターにとっての固有系である系 $K'$ 中においても、クラスター間の距離は約30 mである。図に示した

〔訳注〕 「クラスター時計」の意味については、第4節の最後の段落(8頁)を参照されたい。

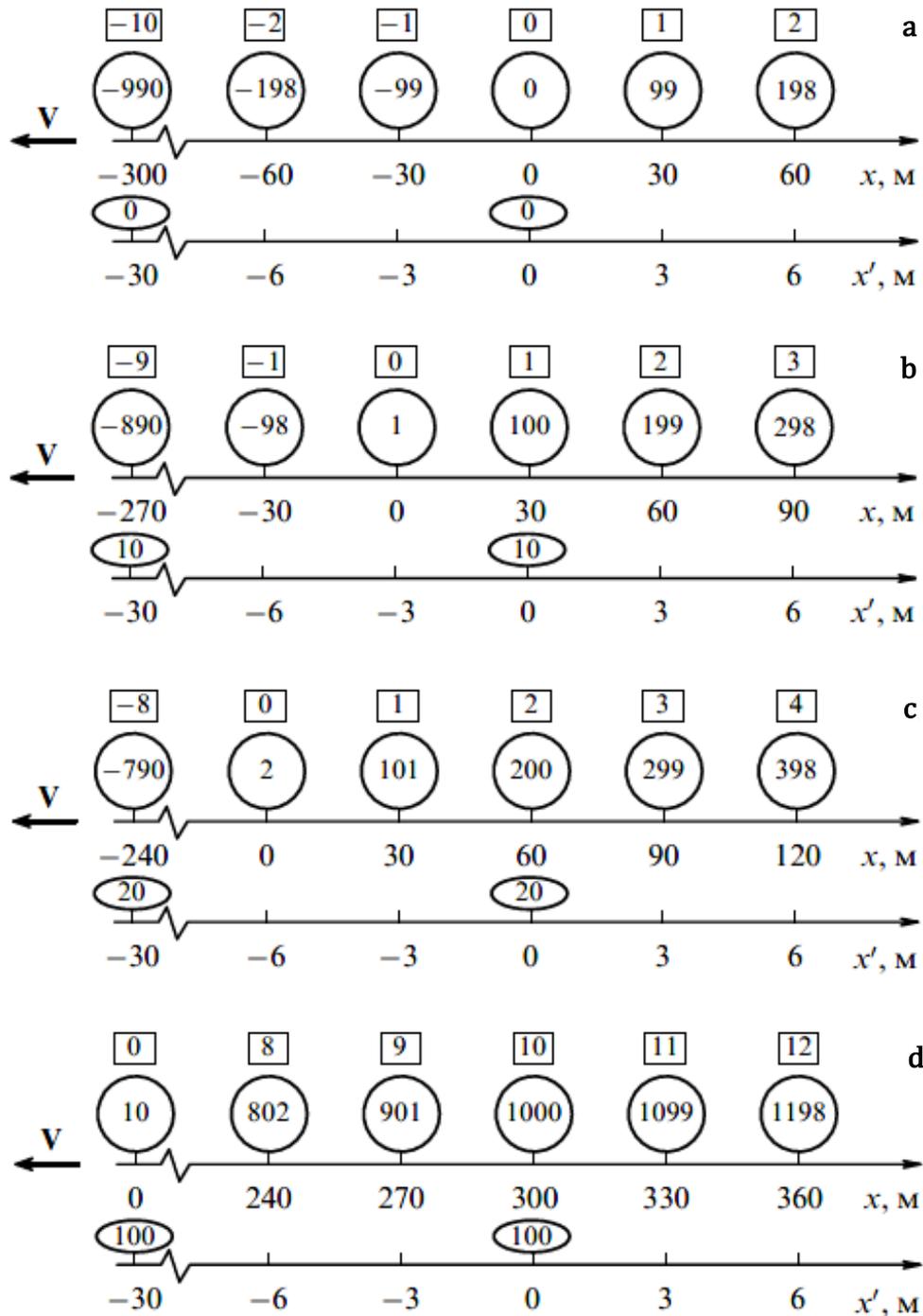


図 4. 運動する時計の歩度の遅れ, それらの歩度の同期性の破れ, および運動する時計の間の距離の収縮

ように, 実験室時計はクラスター時計に対して速度 $V$ で右から左に向かって運動している。時刻 $t' = 0$  (クラスター時計による時刻) に, 両方の座標系の原点は一致している (図 4a)。点 $x = 0$  に存在している番号 0 の実験室時計もまた, 時間 $t = 0$  を示している。

2 つの事実が注意を引く。第 1 に, (34) によれば, 実験室時計の示度は相異なっている (時間は円および楕円の内部に ns 単位で示されている。より分かり易くするため, 全ての時計の示度は丸められている): 番号 2 の時計は隣の時計と比べて $\delta = 99$  ns だけ進んでおり, 隣の時計は番号 0 の時計より 99 ns だけ大きい時間を示している, 等々。第 2 に, 系 $K'$

中においては、実験室時計の間の距離は $\Delta x' \approx 3 \text{ m}$ 、すなわち系K中における距離の10分の1である。時間 $\Delta t' \approx 10 \text{ ns}$ が経過したとき(図4b)、点 $x' = 0$ におけるクラスターの向かい側に、時間100 nsを示している番号1の時計が現れる。隣の実験室時計の示度の差は依然として99 nsであるが、このとき、全ての実験室時計の示度は $\Delta t = 1 \text{ ns}$ だけ増大している。時間 $\Delta t' \approx 20 \text{ ns}$ が経過したとき、クラスターの向かい側に、時間200 nsを示している番号2の時計が現れ(図4c)、 $\Delta t = 2 \text{ ns}$ である。図4dに示されている状況は、 $\Delta t' \approx 100 \text{ ns}$ が経過したときに実現する。このとき、番号0の実験室時計は、既にその次のクラスターと並んでおり、この実験室時計にとっては $\Delta t = 10 \text{ ns}$ である。

今度は、いずれかの時計の歩度の遅れに関する問題について考察しよう、実験室時計とクラスター時計は相対運動の状態にあるのであるから、その遅れは両方の種類の時計に当てはまる。同一の実験室時計、例えば番号1の実験室時計の示度の変化を追跡し、図4aと図4bに示されている状況を比べると、時間 $\Delta t' = 10 \text{ ns}$ (クラスター時計による時間)の間に、その示度が $\Delta t = 100 - 99 = 1 \text{ ns}$ だけ増大したことを見て取ることができる。これは、その歩度の遅れがクラスター時計の歩度の遅れの10倍であることを示している。他方から見ると、(点 $x' = 0$ に存在する)同一のクラスター時計の示度を、クラスターと並ぶ位置に現れた相異なる実験室時計の示度と比べると、図4bではクラスター時計による時間が10 ns、番号1の時計による時間が100 nsであること、図4cではクラスター時計が20 ns、番号2の時計が200 nsを示していること、図4dではクラスター時計が100 ns、番号10の実験室時計が時間1000 nsを示していることが容易に見て取れる。このことは、クラスター時計の歩度が10倍遅れていることを証明している。

それと同様の考察を、点 $x' \approx -30 \text{ m}$ に位置している、その後続くクラスター時計を用いて行うことができる。例えば図4aと図4dを比べると、100 ns(クラスター時計による時間)が経過したとき、相異なる、しかしクラスターの近傍に存在している実験室時計を用いて測定した時間間隔は $10 - (-990) = 1000 \text{ ns}$ となるという結論に到達する。

最後に、同時性の相対性、すなわち、ある基準系において同時に生じる事象は、別の基準系では同時にはならないということも示そう。実際、時刻 $t' = 20 \text{ ns}$ (図4c)に、座標 $x'_1 \approx -30 \text{ m}$ および $x'_2 = 0 \text{ m}$ のクラスターが、それらの近傍に存在している実験室時計を「損傷した」としよう。それらの針は、それぞれ、目盛り $t_1 = -790 \text{ ns}$ および $t_2 = 200 \text{ ns}$ の所で「停止した」。したがって、加速器上で作業している実験者にとっては、時計の損傷は990 nsの時間間隔で順々に生じた。

## 8. 非同期性と等価原理

アインシュタインは慣性力および重力が物体の質量に比例していることに注意を払い、簡単な思考実験を提案した。観測者が、全ての側が閉じられているエレベーターのキャビンの中にいるとしよう。キャビンが地上で静止しているとき、観測者は、引力の普通の発現を見るであろう：全ての物体は同一の加速度で落下することになる。

キャビンが引力が存在しない空間中で、天井の方向を向いている等加速度 $g$ で運動している場合にも、観測者は、キャビンの床に落下していく全ての物体の加速度が同一であることに気付く。それゆえ、キャビン中で生じる現象に基づいてこれら2つの場合を区別することが可能なのは、キャビンが十分に大きい場合に限られる。確かに、重力場の非一様性の結果、落下する2つの物体の間の距離の微弱な変化を感知することは可能であるが、慣性力の場の中ではこの変化は生じない。しかし、その中では慣性力の作用と重力の作用を区別することができないような局所基準系を選ぶことが常に可能である。この主張は、有名なアインシュタインの等価原理として知られている。アインシュタインはこの原理に基づいて一般相対性理論を開発した。

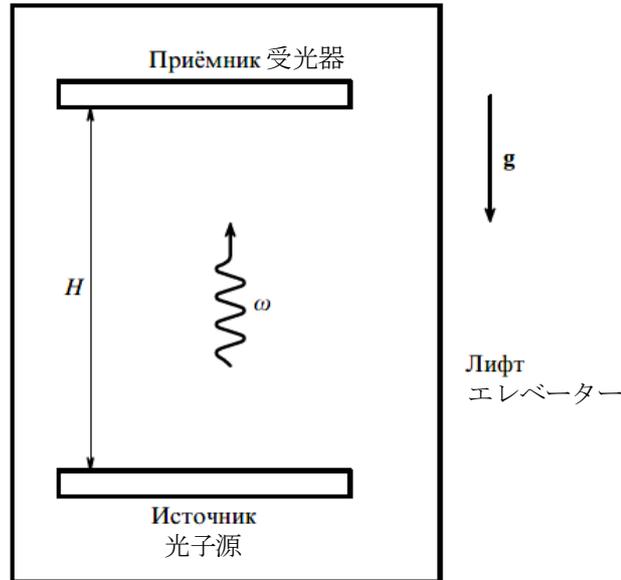


図 5. 重力赤方偏移を説明するための等価原理の図解

一般相対性理論の主要な効果の 1 つ、重力場中における赤方偏移は等価原理を用いて説明される。周波数 $\omega$ の光子源と、光子源の上方の高度 $H$ の所に配置された、それらの光子を吸収することが可能な受光器とを含んでいる装置があるとしよう (図 5)。

地球の重力場中を上方に飛んでいる光子について検討しよう。重力場は一様であるとみなそう。効果は、受光器によって記録される周波数は $\omega$ より $\Delta\omega$ だけ小さいということである。1 次近似において、次の等式が生じる：

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{gH}{c^2}. \quad (35)$$

ここで $c$ は光速である。

装置に対して加速度 $g$ で自由落下するエレベーター (図 5 参照) の基準系中におけるこの効果を分析しよう。エレベーター中には重力場は存在せず、それゆえ、光子の周波数の変化をもたらすことができないようないかなる原因も存在しない。時刻 $t = 0$ にエレベーターの速度が $v = 0$ で、この時刻に周波数 $\omega$ の光子が放射されるとすると、光子は時刻 $t = H/c$ に受光器に到達する。エレベーターと結び付いてる基準系中において、受光器は上の方向を向いた次の速度を持つことになる：

$$v = gt = \frac{gH}{c}. \quad (36)$$

したがって、光子は受光器に追いつくことになる。しかし、この場合には、ドップラー効果が発現しなければならない。この効果によれば、受光器中で記録された周波数は $\omega$ より $\Delta\omega$ だけ小さいことが判明する：

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c}. \quad (37)$$

(37)に(36)の速度 $v$ を代入すると、一般相対性理論で予言されている公式(35)が得られる。以上において検討したことから、光子の周波数 $\omega$ は変化せず、効果は受光器の運動から生じていることが明らかとなる。

今度は、重力場中における $\Delta\omega$ の出現は何と関係しているかについて検討しよう。一般相対性理論によれば、静的な重力場中においては、光子の周波数 $\omega$ は上昇高度 $H$ とともに変化しない。したがって、 $\Delta\omega$ の出現の唯一可能な説明は、光子源の近傍に存在する時計の歩度と、受光器の近傍に存在する時計の歩度の違いである。

実際、時計の歩度は、時計が重力場中で上昇するにつれて増大する。例えば地球上の時計が時間 $t$ を「測定した」場合、高度 $H$ に上昇した時計は、

$$\Delta t = t \frac{gH}{c^2} \quad (38)$$

だけ先を進む。ある時計がある高度上の飛行機中に存在しており、他の時計が地球上に残されているという、精密時計を用いた直接的実験は、この効果を、最初は誤差 $\approx 10\%$ で (J.ヘイフリーと R.キーティングの実験) [10], 次に誤差 $\approx 1\%$ で (C.アレーらの実験) [11] 裏付けた。

1976年、ハーバード大学スミソニアン天体物理観測所の R.ヴェッツと M.レヴィンは、NASAの研究者たちと共同で、Scout D ロケットに1時間当たり1兆分の1秒の精度を持つ原子時計を搭載し、バージニア州ワロップス島から打ち上げた [12]。マイクロ波信号の相互交換方式を用いて、2台の原子時計の示度が比較された。ロケットが10000 kmの最大高度に到達した時刻までの間に、ロケットに搭載されている原子時計は、地球上に残されていた時計より40億分の1秒先を進んでいた。実験データと理論的計算結果との不一致は0.01%未満であった。

原子時計の場合には、それが重力場中を上昇するとき、原子中の電子のエネルギー準位間の間隔が増大し、原子核時計の場合には、原子核のエネルギー準位間の間隔が増大する。原子 (原子核) 中の順位のエネルギー差が増大すると、放射周波数が上昇し、振動周期が減少する。このことは、そのような原子 (原子核) 時計がより速く進むようになることを意味している。

光子の周波数が、ある場合には上方に位置する「速い」時計によって、別の場合には下方に存在する「遅い」時計によって測定される。1次近似において、周波数の赤方偏移 $\Delta\omega$ に関する公式(35)が得られる。 $\Delta\omega$ が、相異なる歩度を持つ時計を用いて測定したときにおける、単なる周波数差であることは明らかである。

重力が存在するため、航法衛星の原子時計は1日間に次の値だけ進むことになる：

$$\Delta t = t \frac{gH}{c^2} = t \frac{\Delta U}{c^2}. \quad (39)$$

ここで $\Delta U$ は重力ポテンシャルの変化である：

$$\Delta U = -GM \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right).$$

$H = 3R = 19200$  km,  $t = 8.6 \times 10^4$  sのとき、 $\Delta t$ の値は $\Delta t = 46 \mu\text{s}$ となる。

したがって、相対論的遅れを考慮すると、衛星上と地球上の時計の示度の差は1日当たり $\Delta t_0 = \Delta t - \Delta t' = (46 - 7.7) \mu\text{s} = 38.3 \mu\text{s}$ となる。この差を考慮しない場合には、衛星と地球上の物体の間の距離の決定における誤差は $\Delta r = c\Delta t_0 = 11.5$  kmとなるはずである。

1960年、パウンドとレブカは、鉄同位体 $^{57}\text{Fe}$ の原子核によって放射されるガンマ線を用いた実験を行い、公式(35)を誤差 $\sim 10\%$ で (後にパウンドとスナイダー [J.L. Snider] は誤差を $\sim 1\%$ まで減少させた) 裏付けた [13]。光子は高さ約22 mの塔の中で上昇した (別のシリーズの実験では下降した)。観測される周波数シフトは極めて小さい値 ( $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-15}$ ) であった。メスバウアー効果のおかげで、高い測定精度が達成された。メスバウアー効果とは、光子の放射の過程で、反跳が1個の放射原子ではなく、結晶全体によって受け止められるということである。結晶の質量は大きいので、反跳速度は小さい。それゆえ、単色性がきわめて高い光子が放射 (および吸収) され、このことが高い放射精度が達成されることを可能にする。

さて次に、系K中にいる観測者に対して速度 $V$ で運動する時計の同期性の破れの問題に取り掛かろう。系K'は、速度 $V$ に達するより前に加速的に運動しなければならない。系K'の加速運動の初期段階 ( $\gamma = 1$ ) について検討し、小さい時間セグメント $t$ の間、基準系の加速

度 $a$ は一定であるとみなそう。このとき、時間 $t$ が経過したとき、基準系は速度 $V = at$ に達する。等価原理によれば、そのとき運動方向上で互いに距離 $L$ の所に存在している、加速中の基準系中の時計[複数]の示度は、その基準系中で静止している観測者の視点から見ると、(39)により、次の値だけ違っている：

$$\Delta t = t \frac{aL}{c^2} = \frac{VL}{c^2}. \quad (40)$$

この違いを除去し、それによって系 $K'$ の時計を同期化するためには、この系中にある観測者は、先に進んだ時計の「針を後ろに戻さなければならない」。他方、 $K$ 系中にある観測者は、このことを非同期性の発現として、すなわち、それらの運動方向上で互いに前後に位置している時計の示度の逐次的な減少として記録する。

## 9. ミンコフスキー空間

変数 $x, y, z, ct$ の多様体がミンコフスキー空間を形成している。事象間の因果関係は、それらの事象が $x$ 軸上の相異なる点で生じる最も単純な場合には、いわゆるミンコフスキー平面(図6)を用いて分析すると都合が良い。この平面上におけるデカルト座標は変数 $x$ および $ct$ である。基準系 $K$ の $x$ 軸上で生じる任意の事象は、ミンコフスキー平面上に1点として写像される。時刻 $t = 0$ に座標原点で閃光が生じた場合には、波面の $x$ 座標は次の関係式によって決定される：

$$x = \pm ct. \quad (41)$$

ミンコフスキー平面上では、運動法則(41)は、座標軸の間の角度の2本の2等分線(破線の直線)によって写像される。2つの空間座標( $x$ および $y$ )の場合には、線の代わりに、光円錐と呼ばれる円錐が得られる。3つの空間座標の場合にも「光円錐」の座標が導入される。ただし、これを図で表すことはできない。時刻 $t = 0$ に座標原点(座標原点としては $x$ 軸の任意の点を選ぶことができることに留意しよう)にいる観測者にとっては、光円錐はミンコフスキー空間を3つの部分に分割している。上側の円錐の内部の領域は「未来」、下側の円錐の内部の領域は「過去」と呼ばれている。残りの部分は「中性」領域である。光円錐面上の点によって写像される任意の写像が光的間隔 [lightlike interval] によって結び付いていることは明らかである：

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0. \quad (42)$$

「未来」領域に属する事象 $P_2$ または「過去」領域に属する事象 $P_1$ は、点 $O$ における「ヌル」

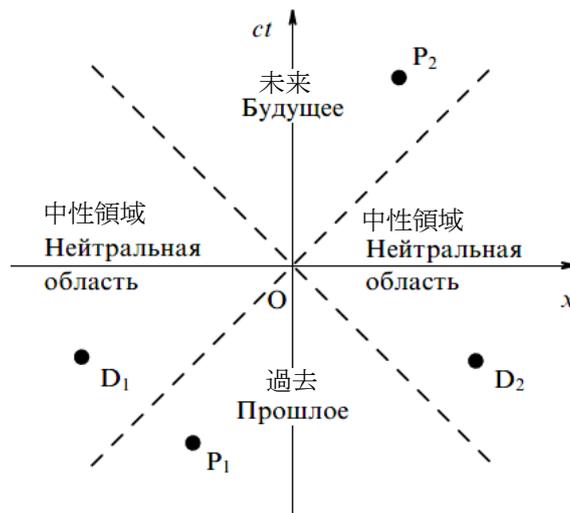


図6. ミンコフスキー平面

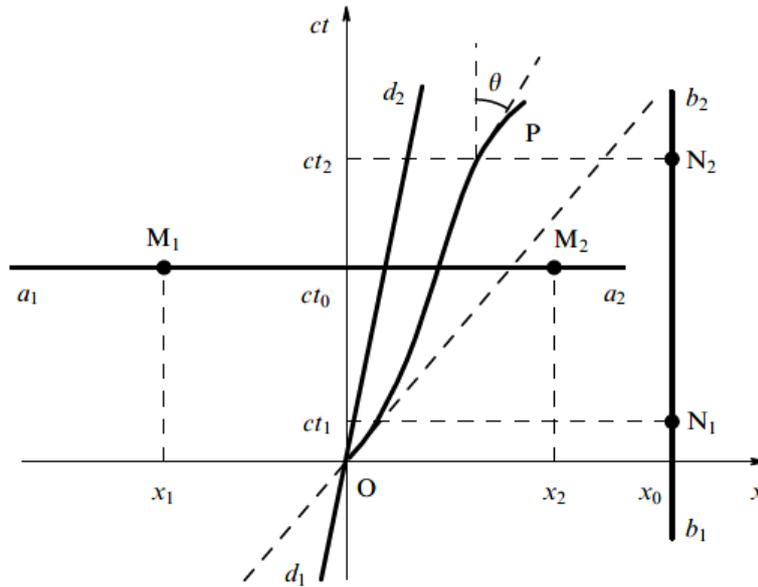


図 7. 粒子の運動のミンコフスキー平面上への写像

事象と時間的間隔 [timelike interval] によって結び付いている ( $\Delta S^2 > 0$ )。

「過去」領域に属する任意の事象 $P_1$ は「ヌル」事象より前に生じたものであり、「ヌル」事象の原因である可能性がある。それに対し、「未来」における任意の事象 $P_2$ は「ヌル」事象より後に到来するものであり、それゆえ、「ヌル」事象の結果である可能性がある。したがって、点 $x = 0$ にいる観測者にとっては、下側の円錐に属する全ての事象は「過去」に生じたものであり、上側の円錐に属する全ての事象は「未来」に到来する。

「中性」領域に属する任意の事象 (図 6 の点 $D_1$ および $D_2$ ) は、点 $O$ における事象と空間的間隔 [spacelike interval] によって結び付いている ( $\Delta S^2 < 0$ )。これらの事象と「ヌル」事象との間には因果関係が存在し得ないことは明らかである。

座標軸 $x$ およびこれに平行な存在し得る全ての直線 (例えば直線 $a_1a_2$ ) は、基準系 $K$ におけるいわゆる同時刻線である (図 7)。これらの直線に属する任意の 2 つの事象 (例えば直線 $a_1a_2$ 上の事象 $M_1$ および $M_2$ ) は同時である、すなわち、系 $K$ 中における時計で同時刻 $t_0$ に、しかし空間の相異なる点 $x_1$ および $x_2$ において生じる。これらの事象は空間的間隔によって結び付いており、それゆえ、これらの間には因果関係が存在し得ないことは明らかである。

座標軸 ( $x = 0$ ) 上およびこの座標軸に平行な存在し得る全ての直線  $x = \text{const}$  (例えば直線 $b_1b_2$ ) 上には、空間の同一の点において、しかし相異なる時刻に生じる事象が写像される。これらの直線に属する点によって写像される任意の 2 つの事象は、同一の座標値によって、しかし相異なる時間値によって特徴付けられる (例えば直線 $b_1b_2$ 上における事象 $N_1$ および $N_2$ は、座標 $x_0$ を持つ同一の点において、しかし相異なる時刻 $t_1$ および $t_2$ に生じた)。これらの事象は時間的間隔によって結び付いており、これらの間においては因果関係が存在し得ることは明らかである。先に生じた事象が原因であり、後に到来した事象が結果である可能性がある。

ミンコフスキー平面上には、事象だけでなく、粒子の運動も写像することができる。例えば相異なる点において静止している粒子は直線  $x = \text{const}$  によって写像される。これらの直線は静止粒子の世界線と呼ばれている。一定速度 $V$ を持つ粒子の運動は、 $ct$ 軸に対する傾角が $45^\circ$ を超えない直線によってこの平面上に写像される。このような直線は運動粒子の世界線と呼ばれている。例えば粒子が時刻 $t = 0$ に座標原点に存在していた場合には、その世界線 $d_1d_2$ は「過去」領域と「未来」領域に所在している。この直線は次の表式によって決定される：

$$ct = \frac{x}{\beta}. \quad (43)$$

ここで $\beta = V/c$ である。

粒子の速度 $V$ が可変の場合には、その世界線は次の方程式を持つある曲線 OP によって写像される：

$$ct = f(x). \quad (44)$$

この曲線への任意の点における接線は、座標軸との間で角度 $\theta$ を形成する。この角度に関して次式が得られる：

$$\tan \theta = \beta. \quad (45)$$

$V \leq c$ であるから、 $\theta \leq 45^\circ$ である。

## 10. 速度の変換

特殊相対性理論によれば、相対論的速度での運動時には、ガリレイ変換から導き出される速度合成則は満たされない。1964年にCERNの加速器でT.アルヴェーガー [T. Alväger], F.ファーリー [F.J.M. Farley], J.クジエルマン [J. Kjellman] およびL.ヴァリン [L. Wallin] によって行われた実験の1つ [14] について検討しよう。

陽子を加速するため、周波数 $\nu = (9.53220 \pm 0.00005)$  MHzの交流電場が用いられた。陽子が加速されるためには、陽子は電場と同位相で加速区間に入らなければならない。それゆえ、陽子クラスターは加速器リング中でそれと同じ周波数で互いの後を追わなければならない。所与のリング長のとき、隣り合う陽子クラスターは距離 $s = 31.45$  mの所にあった (図8)。各クラスターの長さ $l$ はおよそ1 mであった。

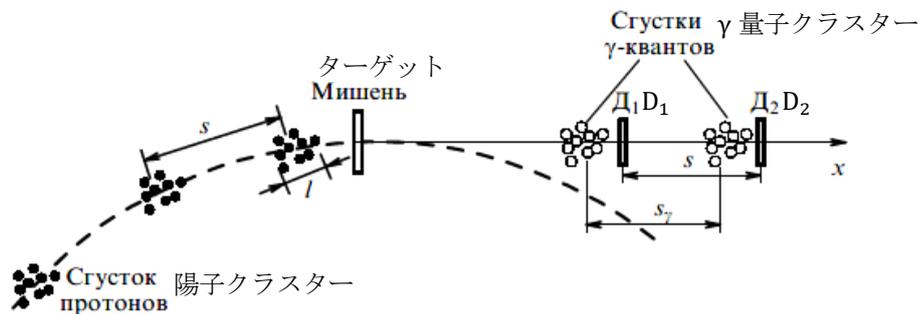


図8. CERNの加速器で行われた実験のスキーム

加速された陽子とターゲットの原子核との相互作用の結果、中性パイオン $\pi^0$ を含め、様々な2次粒子が形成される。陽子は周波数 $\nu$ を持ったクラスターとしてターゲットに当たったので、中性パイオンもそれと同じ周波数を持ったクラスターとして誕生した。誕生後、中性パイオンは速度 $V \sim c$ で加速器の円への接線に沿って検出器 $D_1$ および $D_2$ の方向に運動した。これらの検出器も互いに距離 $s = 31.45$  mの所に設置されていた。また、全ての荷電粒子は磁石を用いて偏向されていた。中性パイオンは平均寿命が $\tau = 0.83 \times 10^{-16}$  sの不安定粒子であり、距離 $\lambda = \gamma V \tau \approx 1.1 \times 10^{-6}$  m ( $\gamma \approx 45$ ) の所で、すなわち自らの誕生場所の近傍で2つのガンマ粒子に分裂する。この実験では、速度 $V > 0.99975$  c (ローレンツ因子 $\gamma > 45$ ) を持つ、パイオンと同一の方向に飛行していたガンマ量子が選び取られた。このように、速度 $V$ で $x$ 軸方向に運動していた中性パイオンから、パイオンに対するその速度が光速と等しい、パイオンと同一の周波数で互いの後を追うガンマ量子クラスターが誕生した。

もしガリレイ変換が正しければ、検出器に対するガンマ量子の速度は次のように表されなければならない：

$$v_\gamma = V + c. \quad (46)$$

この場合には、互いに距離 $s_\gamma = v_\gamma/v$ の所に存在することになる隣り合う2つのガンマ量子クラスターは、同時にではなく、次の時間間隔において検出器に到達する：

$$\Delta t = \frac{s_\gamma - s}{v_\gamma} = \frac{1}{v} - \frac{c}{v v_\gamma} = \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{c}{v_\gamma} \right) = \frac{1}{v} \delta. \quad (47)$$

ここで $\delta = 1 - c/v_\gamma$ である。実験は $\Delta t = -(0.005 \pm 0.013) \text{ ns}$ であることを示した。それゆえ、誤差の範囲内で $\delta = -4.7 \times 10^{-5}$ であり、次の値が得られる：

$$v_\gamma = (2.9977 \pm 0.0004) \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (48)$$

これは光速と一致している。

したがって、公式(46)の代わりに、新たな速度変換則が必要となる。それらの変換則はローレンツ変換(1)に基づいて容易に得ることができる。ローレンツ変換の左辺および右辺の微分は次の形を持っている：

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - Vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right). \end{aligned} \quad (49)$$

(49)の最初の3つの等式の左辺および右辺を、それぞれ最後の等式の左辺および右辺で割り、基準系KおよびK'における速度の射影の運動学的定義を考慮しよう。その結果、求める座標軸への速度の射影変換が得られる：

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_y, \quad v'_z = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_z. \quad (50)$$

関係式(50)は速度の射影のローレンツ変換として知られている。小さい速度の場合 ( $v \ll c$ ,  $V \ll c$ ) の場合には、これらはガリレイの速度変換に移行する。

(50)を $v_x$ ,  $v_y$ および $v_z$ について解くと、速度の射影の逆変換を得ることができる：

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_y, \quad v_z = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_z. \quad (51)$$

見出された変換を、上記で検討した実験におけるガンマ量子の速度の決定のために適用しよう。中性パイオンは速度 $V = 0.99975c$ で運動し、また、ガンマ量子は光速 $v'_x = c$ で運動するのであるから、公式(51)の第1式は、この場合には次の値を与える：

$$v_\gamma = \frac{c + 0.99975c}{1 + c \cdot 0.99975c/c^2} = c. \quad (52)$$

これは(48)の測定結果と完全に一致している。

速度変換の相対論的公式(50)および(51)は、例外なしに全ての実験によって裏付けられている。第11節—第13節では、いくつかの重要な例について検討しよう。

## 11. ビーム衝突型加速器

素粒子の衝突の物理的結果は、そこでは相対論的運動量の和がゼロに等しい、質量中心系における素粒子のエネルギーの大きさに依存している。そのエネルギーがより高いほど、新たな現象のスペクトルはより豊かになる。

互いに対向方向に速度 $v_0$ （この速度はローレンツ因子 $\gamma_0$ に対応している）で運動している2個の同種粒子の衝突について検討しよう。この場合には、質量中心系は静止しており、

各粒子のエネルギーは $\gamma_0$ に比例している。これらの粒子の衝突は、これらのうち一方と結び付いている基準系中においても検討することができる。このとき、現象のスペクトル全体は以前と同じままである。しかし、両粒子の接近の相対速度 $v$ に対応するローレンツ因子 $\gamma$ は $\gamma_0$ より著しく大きくなる。実際、(50)において $v_x = v_0$ ,  $V = -v_0$ とおくと、相対速度 $v = v'_x$ に関して次式が得られる：

$$v = \frac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2}. \quad (53)$$

相対論的因子 $\gamma$ は次のように表される：

$$\gamma = 2\gamma_0^2 - 1. \quad (54)$$

例えば $\gamma_0 = 10$ のときには $\gamma \approx 200$ が得られ、 $\gamma_0 \approx 10^3$ のときには因子 $\gamma$ は2000倍(!)に増大する。これより、きわめて重要な結論が導き出される：静止した粒子(ターゲット)との衝突から得られる効果と同じ効果を得るためには、ローレンツ因子 $\gamma_0$ の相対的に小さい値に対応する速度で互いに対向方向に運動する粒子を衝突させる方が、はるかに有利である。

このような着想は、相対論的速度で運動する粒子の2本の対向ビームが衝突する方式の加速器において実現されている。例えば $\gamma \approx 10^6$ という値を達成するためには、普通の加速器(静止ターゲットを備えているもの)のサイズは地球の半径を超える可能性があり、このことがその建造を不可能にしている。ビーム衝突型加速器について言えば、(所与の磁束密度のときの)それらのサイズ、したがってまた建造コストは $\gamma/\gamma_0 = 2\gamma_0$ 分の1となる。このような加速器のもう1つの長所は2次粒子の空間的散乱の対称性である。このような加速器の着想を最初に提唱したのはG.I.ブトケル[Gersh Itskovich Budker]であり、ノヴォシビルスク近郊に最初の加速器の1つが建造された。

## 12. 粒子ジェット

相対論的粒子が静止したターゲットと衝突すると、新たな粒子(2次粒子)が形成される。それらの粒子は、その軸が1次粒子の速度ベクトルに沿った方向を向いている、細い円錐の内部を運動し、その発散角はローレンツ因子 $\gamma$ に依存している( $\gamma$ がより大きいほど、角度はより小さくなる)。2次粒子はいわゆるジェットを形成する。円錐の発散角が小さいときには、ジェットは事実上検出されない。なぜなら、それらは互いにきわめて近い所にあるからである。この場合には、1個の粒子を別の粒子から識別することは困難になる。

粒子の衝突は質量中心系中で検討すると都合が良い。質量中心系中では、 $\gamma_0 < \gamma$ であるので、2次粒子は円錐内部を大きな発散角で飛行する。それゆえ、対向ビームを用いた加速器では、2次粒子の検出および識別の問題が著しく軽減される。

ジェットを形成している粒子の運動方向は、速度合成則を用いて計算することができる。系 $K'$ (質量中心系)中において、1次粒子が対向方向に $x'$ 軸方向に運動し、衝突後、2次粒子のうちの1個が $x'$ 軸に対して天頂角 $\theta'$ の方向の速度 $v'$ を得るとしよう(図9a)。

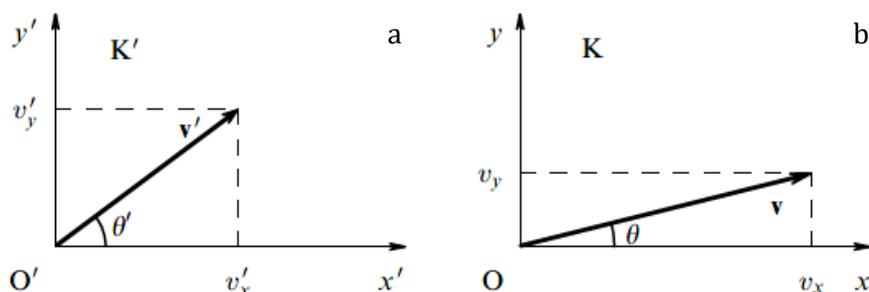


図9. 相異なる基準系中における、ジェットを形成している粒子の運動方向

この2次粒子の速度の射影は次のようになる：

$$v'_x = v' \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta'. \quad (55)$$

系K'（質量中心系）は、その中で粒子のうちの1個が静止している系Kに対し、ある速度Vで運動している。系K中における2次粒子の速度の射影は、速度合成則に従って次のようになる：

$$v_x = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + v'V \cos \theta' / c^2}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'V \cos \theta' / c^2} v' \sin \theta'. \quad (56)$$

これらの射影を

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta \quad (57)$$

の形で書くと、天頂角 $\theta$ （図9b）に関して次式が得られる：

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{v' \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}. \quad (58)$$

ここで $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ である。これより、 $\gamma \rightarrow \infty$ となる超相対論の場合には、 $\theta'$ の値とは無関係に、天頂角は $\theta \rightarrow 0$ となることが分かる。したがって、 $\gamma$ の値が大きいときには、ほとんど全ての2次粒子はきわめて細い円錐の内部を運動する。

### 13. 恒星の光行差

恒星が基準系Kのx軸に対して角度 $\theta$ の所に位置している場合には、この軸の方向に運動している別の基準系K'中では、その角度はそれとは異なっていることが判明する（図10）。系K中における光波の速度ベクトルの射影は次のようになる（図10a）：

$$v_x = -c \cos \theta, \quad v_y = -c \sin \theta. \quad (59)$$

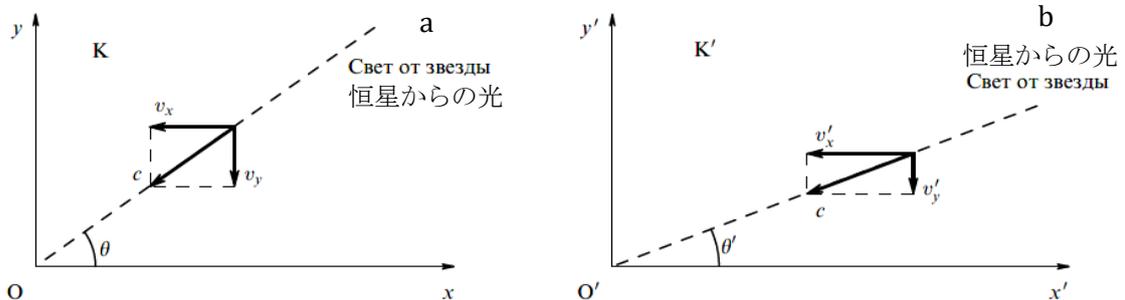


図10. 相異なる基準系中における、天頂に存在する恒星からの光ビームの伝播方向

系K'中では、速度の射影の変換公式によって次式が得られる：

$$v'_x = \frac{-c \cos \theta - V}{1 + V \cos \theta / c}, \quad v'_y = -\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V \cos \theta / c} c \sin \theta. \quad (60)$$

ちなみに、 $\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = v' = c$ であることに注目しよう。図10bにより、

$$v'_x = -c \cos \theta', \quad v'_y = -c \sin \theta' \quad (61)$$

であるから、求める角度 $\theta'$ は次のように書くことができる：

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\sin \theta}{\gamma(V/c + \cos \theta)}. \quad (62)$$

$\gamma \rightarrow \infty$ となる超相対論の場合には、恒星は、その位置とは無関係に、基準系K'の運動方向に対してきわめて小さい角度の所に位置しているように見えることになる。

天文学で恒星の光行差を特徴付けるために用いられている角度  $\delta' = \pi/2 - \theta'$  を導入すると、(62)より、天頂 ( $\theta = \pi/2$ ) に存在する恒星に関して次の公式が得られる：

$$\sin \delta' = \frac{V}{c}. \quad (63)$$

この公式は、相対論的速度のとき、古典的公式

$$\tan \delta' = \frac{V}{c} \quad (64)$$

と著しく異なったものとなる。ここで検討されている現象は、遠方の恒星から伝播して来る光波の到来方向の変化と関係していることに注目しよう。相異なる基準系において、波面がいかなる方向を向いているかについて検討しよう。

簡単のため、基準系Kにおいて、恒星は天頂 ( $\theta = \pi/2$ ) に存在しているとしよう。このとき、平坦波面  $a_1 a_2$  は  $x$  軸上の点 O および P に同時に到達する (図 11a)。観測者は、波面に対して垂直な波の運動方向に基づいて恒星の位置を (視覚的に、または光学装置を用いて) 記録する。

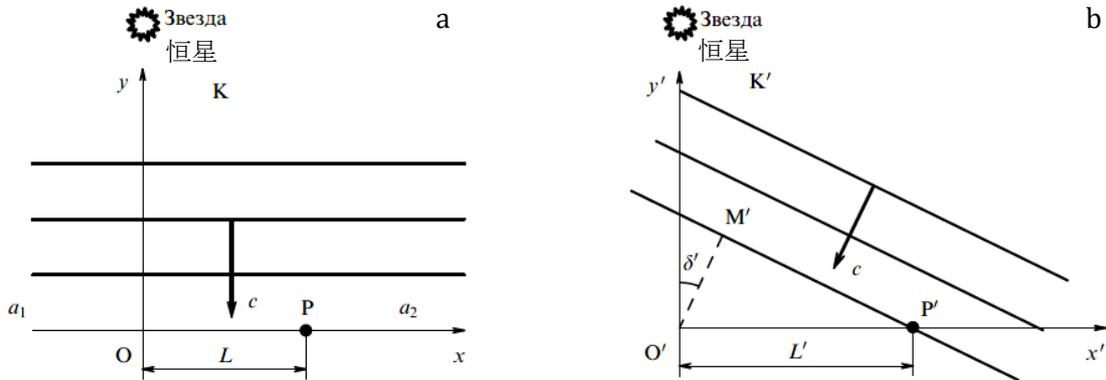


図 11. 相異なる基準系中における、天頂に存在する恒星から伝播する光波の平坦波面の位置

基準系  $K'$  (図 11b) においては、光は、点  $O'$  には点  $P'$  より遅く到来する。線分の長さを  $OP = L$  とすると、時間の変換の公式(1)により、そのような遅延は次のようになる：

$$\Delta t' = \gamma \frac{V}{c^2} L. \quad (65)$$

基準系  $K'$  中における観測者は、波面への法線が  $y'$  軸の方へ角度  $\delta'$  だけ傾いていることを発見する。時間  $\Delta t'$  の間に、光は距離  $M'O' = c\Delta t'$  を通過する。座標に関するローレンツ変換によれば、系  $K'$  中における点  $O'$  と  $P'$  の間の距離は  $L' = \gamma L$  である。これより次式が得られる：

$$\sin \delta' = \frac{O'M'}{O'P'} = \frac{c\Delta t'}{L'} = \frac{V}{c}. \quad (66)$$

これは(63)と一致している。

#### 14. 加速度の変換

ガリレイ変換の場合には、ある慣性基準系から別の慣性基準系に移行するとき、加速度は不変量である。相対論的速度で運動するとき、加速度の射影  $a_x, a_y, a_z$  が相異なる慣性基準系中において不変であり続けることができないことは明らかである。なぜなら、速度の射影の微分も、時間  $dt$  の微分もローレンツ変換の不変式ではないからである。公式(51)より、速度の射影の微分

$$\begin{aligned}
dv_x &= \frac{dv'_x}{\gamma^2(1+v'_xV/c^2)^2}, \\
dv_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_y}{1+v'_xV/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_yV/c^2}{(1+v'_xV/c^2)^2} dv'_x, \\
dv_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_z}{1+v'_xV/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_zV/c^2}{(1+v'_xV/c^2)^2} dv'_x
\end{aligned} \tag{67}$$

および時間の微分

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right) \tag{68}$$

が見出される。

(67)の3つの等式の左辺および右辺をそれぞれ(68)の左辺および右辺で割ると、次の加速度の射影の変換が得られる：

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3(1+v'_xV/c^2)^3}, \\
a_y &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_y}{(1+v'_xV/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_y(V/c^2)a'_x}{(1+v'_xV/c^2)^3}, \\
a_z &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_z}{(1+v'_xV/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_z(V/c^2)a'_x}{(1+v'_xV/c^2)^3}.
\end{aligned} \tag{69}$$

加速度の不変性は、単純な例において(69)を用いることによって容易に例証することができる。系 $K'$ 中において、粒子が $x'$ 軸に垂直な方向に等速かつ直線的に( $v'_y \neq 0, v'_z \neq 0, a'_y = 0, a'_z = 0$ )、そして $x'$ 軸方向に加速度 $a'_x$ で運動している場合には、系 $K$ 中においては、粒子はゼロではない加速度 $a_y$ および $a_z$ を持つ。

## 15. 共動基準系

実験室系 $K$ の $x$ 軸方向に運動する共動慣性基準系 $K'_c$  [添字 $c$ はcomoving]という重要な概念を導入しよう。この基準系の速度 $V$ は、速度の射影 $v'_x$ がゼロになる( $v'_x = 0$ )という条件によって決定される。

粒子が $x$ 軸方向に運動する場合には、それに対応する共動系 $K'_c$ の相異なる時刻における速度 $V$ は、相異なっていなければならない：

$$V = v_x. \tag{70}$$

なぜなら、速度 $v_x$ は可変であるからである。系 $K'_c$ は慣性基準系であり、したがって一定速度 $V = \text{const}$ で運動しなければならないことを特に強調しよう。条件(70)が満たされるのは、相異なる速度で運動する複数の基準系 $K'_c$ が組み合わされる場合に限られ、また、各時刻 $t$ に、複数の系のうち、それにとってその時刻に $V = v_x$ である系を用いる必要がある。

$v'_x = 0$ を考慮すると、系 $K$ 中における加速度の射影と、所与の時刻に速度 $V$ で運動している系 $K'_c$ 中における加速度の射影とは、より単純な関係式によって関係付けられる：

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2} - v'_y \frac{V}{c^2} \frac{a'_x}{\gamma^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} - v'_z \frac{V}{c^2} \frac{a'_x}{\gamma^2}. \tag{71}$$

公式(71)において、基準系 $K'_c$ の速度 $V$ は条件(70)から決定されていることに注意を払おう。

共動系 $K'_c$ において、粒子の速度および加速度が $x'$ 軸方向を向いている場合( $v'_y = v'_z = 0, a'_y = a'_z = 0$ )には、実験室系においてゼロでないのは射影 $a_x$ のみである：

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}. \tag{72}$$

その例として、 $x$ 軸方向を向いている定電場 $E$ 中における素粒子の運動について検討しよう。定電場の作用下で、系 $K$ 中の粒子の速度は増大するが、しかし、その運動は等加速度

運動にはならない。実際、共動基準系中では、電荷 $q$ を持つ粒子に対しては力 $f = qE$ が作用する。なぜなら、 $x$ 軸方向を向いている場の強度は全ての慣性基準系中において同一であるからである。この系中 ( $v'_x = 0$ ) では、加速度を決定するために古典的運動方程式を用いることができる：

$$a'_x = a_0 = \frac{qE}{m} = \text{const.} \quad (73)$$

公式(72)に戻り、力 $f = \text{const}$ であるにもかかわらず、 $\gamma$ の増大とともに加速度は $a_x \rightarrow 0$ となることに注目しよう。(73)を考慮すると、(72)より、粒子の速度 $v_x$ の時間依存性および運動法則 $x(t)$ が容易に得られる。実際、(72)を次の形に書き換えよう：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_0 \left[ 1 - \left( \frac{v_x}{c} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (74)$$

ここでは等式(70)が考慮されている。変数 $v_x$ と $t$ を分離すると、次式が得られる：

$$\frac{dv_x}{[1 - (v_x/c)^2]^{3/2}} = a_0 dt. \quad (75)$$

時刻 $t = 0$ において速度 $v_x = 0$ と取ると、(75)の積分は次の関係式をもたらす：

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} = a_0 t. \quad (76)$$

この関係式から $v_x$ を表すと、速度 $v_x$ の増大の法則が得られる：

$$v_x = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} = \frac{ct/t_0}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}}. \quad (77)$$

ここで $t_0 = c/a_0$ は時間の特性スケールである。(77)を(74)に代入すると、次式が得られる：

$$a_x = a_0 \frac{1}{[1 + (t/t_0)^2]^{3/2}}. \quad (78)$$

依存性(77)および(78)を図12に示す。粒子の加速度は単調に減少しており、その速度は $c$ と等しい限界値に漸近的に向かっていることが分かる。ニュートン力学では、粒子の $a_x = a_0$ および速度は無限に増大するはずであり、既に時間 $t_0$ の間に光速度の値に達するはずであることに注目しよう。

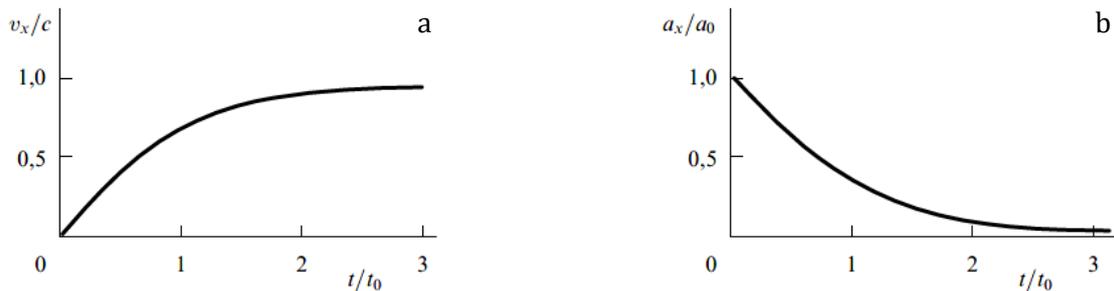


図12. 相対論的粒子に一定の力が作用したときの粒子の速度および加速度の依存性

粒子が所与の相対速度 $\beta = v_x/c$ まで加速される時間 $t_\beta$ が実践的興味を引く。(77)より、次式が導き出される：

$$t_\beta = \beta \gamma t_0. \quad (79)$$

$\beta \approx 1$ であるから、時間 $t_\beta$ は特性時間 $t_0$ の $\gamma$ 倍である。例えば国際プロジェクト TESLA (TeV-Energy Superconducting Linear Accelerator) では、 $a_0 = 3 \times 10^{18} \text{ m s}^{-2}$ のとき、ローレンツ因子が値 $\gamma = 10^6$ に達するときの速度まで電子を加速することが見込まれている。そのような条件下では $t_0 \approx 10^{-10} \text{ s}$ であるから、時間 $t_\beta$ は $\approx 10^{-4} \text{ s}$ となる。

(77)を積分すると、次の運動法則が得られる：

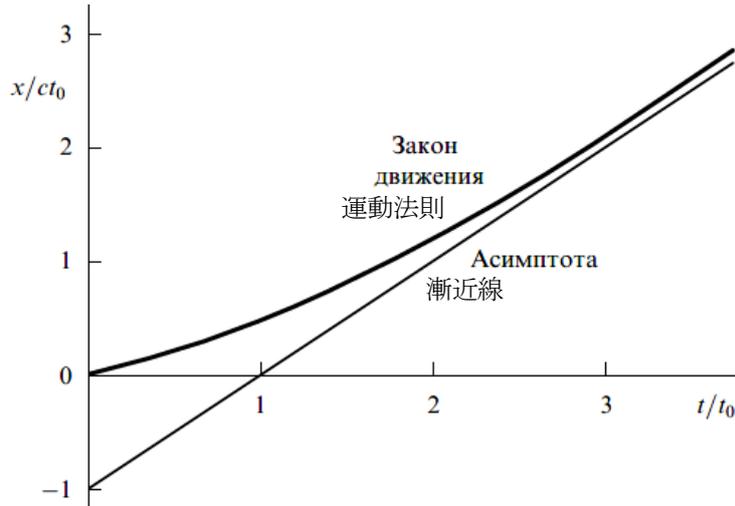


図 13. 相対論的粒子に一定の力が作用したときの粒子の運動法則

$$x = \int_0^t v_x dt = ct_0 \left( \sqrt{1 + \left(\frac{t}{t_0}\right)^2} - 1 \right). \quad (80)$$

ここでは  $t = 0$  のとき  $x = 0$  であることが考慮されている。容易に見て取れるように、 $t \ll t_0$  のとき、次式が得られる：

$$x = \frac{ct^2}{2t_0} = \frac{a_0 t^2}{2}. \quad (81)$$

これは古典的な等加速度運動の法則と一致している。しかし、 $t \gg t_0$  のとき、 $x$  座標は時間とともに、ほぼ直線的に増大するようになる。運動法則の漸近線は直線であり（図 13）、その方程式は次の形を持っている：

$$x = c(t - t_0). \quad (82)$$

(79) および (80) から導き出されるように、粒子は時間  $t_\beta$  の間に次の距離を進む：

$$x_\beta = ct_0(\gamma - 1). \quad (83)$$

特に、電子は値  $\gamma = 10^6$  に到達するために、時間  $t \approx 10^{-4}$  s の間に距離  $x_\beta \approx 30$  km を走行する。当然、そのような長さの直線型加速器の建造は巨額なコストを要し、それゆえ、プロジェクト TESLA は国際プロジェクトとなっている。

実験室基準系中における時間  $t$  に対する固有時間  $\tau$ （粒子と結び付いている時計によって決定された時間）の依存性を見出そう。(77) を考慮すると、その依存性は次の形を持っている：

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - (t/t_0)^2}} = t_0 \operatorname{arsinh} \frac{t}{t_0}. \quad (84)$$

運動時間が大きいとき ( $t \gg t_0$ ) は、次式が得られる：

$$\tau = t_0 \ln \frac{2t}{t_0}. \quad (85)$$

ここでは逆双曲線正弦関数の既知の表記法が用いられている：

$$\operatorname{arsinh} \zeta = \ln \left( \zeta + \sqrt{1 + \zeta^2} \right).$$

上記において検討された時間  $t \approx 10^{-4}$  s のときの加速過程における電子の場合には、 $\tau$  の大きさは  $\tau \approx 1.45 \times 10^{-9}$  s、すなわち、それより 5 桁小さい。

時間の遅れという大きな効果は、原理的には不安定粒子を加速することも可能にする。

例えば電子よりおよそ 200 倍重いミューオンの場合には、特性時間 $t_0$ も 200 倍となる： $t_0 \approx 2 \times 10^{-8}$  s。ミューオンは値 $\gamma \approx 10^6$ に達するために、加速時間 $t_\beta \approx 2 \times 10^{-2}$  sの間に $x_\beta \approx 6000$  kmの経路を進む。(85)により、固有時間は次の値となる：

$$\tau_\beta = t_0 \ln\left(\frac{2t_\beta}{t_0}\right) \approx 3 \times 10^{-7} \text{ s.} \tag{86}$$

すなわち、その固有時間はミューオンの固有寿命より 1 桁小さいことが判明する。この場合には、加速器を円形にする必要がある。

### 16. 双子のパラドックス

双子の兄弟がいて、その一方が地球から遠方惑星まで宇宙飛行をして、地球に戻って来たとしよう。地球に残った双子の視点から見ると、ロケットの運動に起因するローレンツの時間の収縮により、戻って来た宇宙飛行士の双子は彼より若くなる。

しかし、それと同じように推論すると、宇宙飛行士の双子は、地球に残った双子の老化の遅れを予想する権利を持っている。なぜなら、後者はまず最初に地球と一緒に「飛び去り」、次にロケットに戻ったからである。双子のパラドックスはここにある。このパラドックスは、相対性原理の誤った適用から生じている。

実際には、地球に残った双子は、地球と結び付いている同一の慣性基準系中にいる。それとは逆に、ロケットと結び付いている基準系は、加速区間および減速区間上では非慣性基準系であり、遠方惑星への往路および地球への帰路の等速運動区間上では、ロケットの速度で反対方向に運動する、2つの相異なる慣性基準系について語る必要がある。

図 14a のミンコフスキー平面上には、地球から距離 $L_0$ の所にある遠方惑星に向かって速度 $V \sim c$ で運動するロケットの世界線が描かれている。等速運動時間と比べると継続時間の点で小さい可能性のある加速区間および減速区間上では、世界線は曲がっている。地球の世界線は座標軸と一致している。破線の直線で示されているのは光の線 [light line] であり、これは座標軸の間の直角の 2 等分線と一致している。

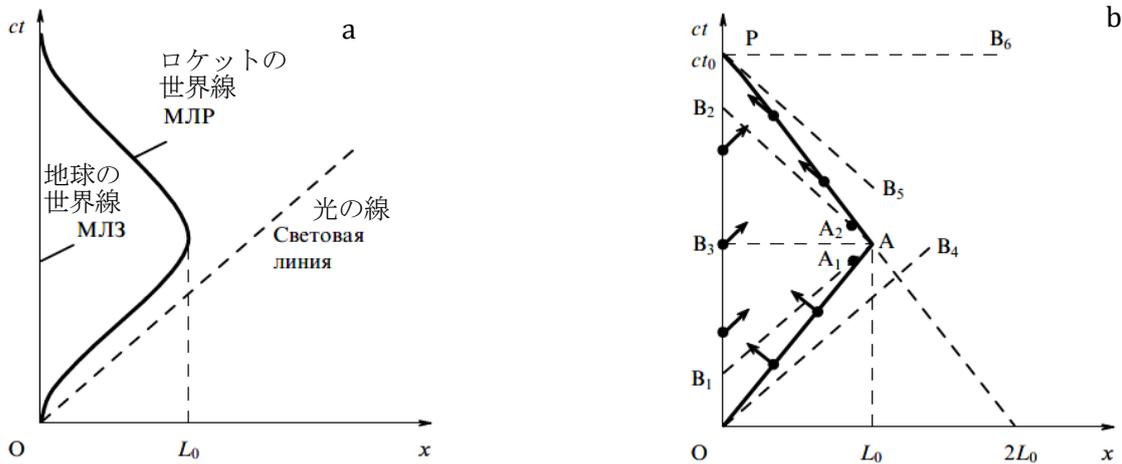


図 14. ミンコフスキー平面上における双子のパラドックスの図解

時間の変換に関するローレンツの公式を用いて、飛行継続時間のきわめて単純な計算を行おう：

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right). \tag{87}$$

ロケットの加速および減速に費やした時間（地球上の時計による時間）を無視し、ロケットの世界線を 2 本の直線 OA および AP の形で描こう（図 14b）。地球上の時計による飛行

継続時間 $t_0$ が次のようになることは明らかである：

$$t_0 = \frac{2L_0}{V}. \quad (88)$$

戻って来たロケット上の時計はそれより小さい時間を示す：

$$t'_0 = \frac{t_0}{\gamma}. \quad (89)$$

したがって、宇宙飛行士の双子の方が老化の度合いがより小さい。彼にとっては、時間の値のこの減少には、驚くべきことは何もない。なぜなら、ローレンツ収縮の結果、地球は時間 $t'_0$ の間に距離 $2L' = 2L_0/\gamma$ を「通過した」からである。しかし、もし彼が、地球の運動によって $t'_0$ と比べて $\gamma$ 分の1に遅くなった地球上の時間 $\tilde{t}_0$ は全時間である、すなわち、

$$\tilde{t}_0 = \frac{t'_0}{\gamma} = \frac{t_0}{\gamma^2} \quad (90)$$

であるとみなした場合には、彼は時間 $t_0$ に関して誤った結論を下す可能性がある。宇宙飛行士の結論の誤りは、 $\tilde{t}_0$ は、彼の飛行時間の間に地球上で経過した時間の小さい部分に過ぎないということにある。宇宙飛行士が惑星に向かって飛んでおり、地球から遠ざかりつつある系 $K'_1$ 中に存在しているとき、同時刻線となるのは $AB_1$ であるが、彼が地球に戻り始め、地球に近付きつつある系 $K'_2$ 中に存在しているとき、同時刻線となるのは $AB_2$ である。時間は $\tilde{t}_0 = (OB_1 + B_2P)/c$ である。したがって、宇宙飛行士は時間間隔 $B_1B_2/c$ を考慮していなかったのである。

この時間間隔を推定するため、公式(87)を用いて、そこで $t'_{A_1} = t'_0/2$ とおこう。この時刻に、ロケットは方向転換点Aに好きなだけ近い所にある点 $A_1$ に存在している。我々の考察において、点 $A_1$ は、ロケットはまだ、地球から遠ざかりつつある基準系 $K'_1$ 中に存在している事実を反映するために用いられる。すると、(87)より、直線 $B_1A_1$ の方程式が得られる：

$$ct = \frac{ct'_0}{2\gamma} + \frac{Vx}{c}. \quad (91)$$

この直線上における全ての事象は時刻 $t' = t'_0/2$ に同時に生じる（宇宙飛行士の視点から見た場合）。地球と結び付いている慣性基準系中にある時計の示度は、これらの事象に関して等しくなることは明らかである。例えば事象 $B_1$ に関しては、地球上の時計は次の時間を示す：

$$t_{B_1} = \frac{OB_1}{c} = \frac{t'_0}{2\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{t}_0 = \frac{1}{2}\frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (92)$$

この時間は、 $x = 0$ のときに(91)から得られる。事象 $A_1$  ( $x \approx L_0$ ) に関しては、地球上の時計は時間 $t_{A_1} = t_0/2$ を示す。

別の基準系 $K'_2$ に移行したとき、宇宙飛行士の時計で $t'_{A_2} \approx t'_{A_1}$ である。事象 $A_2$ と同時に、この基準系中では破線の直線 $B_2A_2$ 上にある事象が生じることになる。地球と結び付いている慣性基準系中では、時計はそれらの事象に関して相異なる時間を示す。特に、事象 $B_2$ に関しては、地球時間は次のようになる：

$$t_{B_2} = \frac{OB_2}{c}. \quad (93)$$

この時間を計算するため、同時刻線 $B_2A_2$ に関する方程式を得よう。

対称性に基づく推論から、時刻 $t = t' = 0$ に、基準系 $K'_2$ の原点が点  $O$  (地球) から距離  $x = 2L_0$ の所に存在していたことは明らかである。それゆえ、(87)には、座標 $x$ の代わりに値 $x - 2L_0$ が入らなければならない。また、系 $K'_2$ の速度 $V$ が地球の方向を向いていることを思い出そう。すると、次式が得られる：

$$t' = \gamma \left[ t + \frac{V}{c^2} (x - 2L_0) \right]. \quad (94)$$

(94)より、同時刻線 $B_2A_2$ に関して次式が得られる（再び $t' = t'_0/2 = t_0/2\gamma$ と取ろう）：

$$ct = \frac{ct_0}{2\gamma^2} - \frac{V}{c} (x - 2L_0). \quad (95)$$

特に、A に無限に近い事象 $A_2$  ( $x \approx L_0$ ) に関しては(95)より $tA_2 = t_0/2$ が見出され、事象 $B_2$  ( $x = 0$ ) に関しては次式が見出される：

$$t_{B_2} = \frac{t_0}{2\gamma^2} + 2\frac{V}{c^2}L_0 = t_0 - \frac{t_0}{2\gamma^2}. \quad (96)$$

こうして、上記の時間 $B_1B_2/c$ に関して次式が得られる：

$$\frac{B_1B_2}{c} = t_{B_2} - t_{B_1} = t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (97)$$

この時間を(90)に追加すると、次式が得られる：

$$t = \frac{t_0}{\gamma^2} + t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2} = t_0. \quad (98)$$

もちろん、このことは地球人からのいかなる反論も引き起こさない。

地球および惑星からの出発時および2回の着陸時における時間の流れの特徴に注目しよう。地球からの出発時に、ロケットは小さい時間間隔 $\delta t \ll t_0$ の間加速し、ロケットの加速の終了時には、宇宙飛行士にとって、地球上の時計と地球の慣性基準系中における惑星上の時計は次の値だけ非同期化している（惑星上の時計の方がより大きい時間を示す）：

$$\Delta t = \frac{VL_0}{c^2} = \beta^2 \frac{t_0}{2}. \quad (99)$$

それゆえ、時刻 $t_0/2$ （惑星上の時計による時刻）に惑星に到着したとき、地球上の時計は次の時間を示す：

$$\frac{t_0}{2} - \Delta t = \frac{t_0}{2\gamma^2} = t_{B_1}. \quad (100)$$

最初は $x$ 軸と一致していた同時刻線は、加速時間の間に方向転換して姿勢 $OB_4$ を取り（図14b）、飛行時間の間はそれ自体で姿勢 $B_1A$ へ平行移動する。惑星への着陸時には、時間 $\delta t \ll t_0$ の間に同時刻線 $AB_1$ の終端（点 $B_1$ ）が上方へ移動し始め（非同期性が減少する）、ロケットが停止した瞬間、同時刻線 $AB_3$ は $x$ 軸に平行になる。このことは、地球上の時計と惑星上の時計は $t_0/2$ に等しい同一の時間を示す（それに対し、宇宙飛行士の時計は時間 $t_0/\gamma$ を示す）ということを意味している。

惑星からの出発時には、再び非同期性が生じるが、ただし今回は、地球上の時計の示度の方が(99)の値だけ大きくなる。このとき、出発時間 $\delta t$ の間に、同時刻線は姿勢 $AB_3$ から姿勢 $AB_2$ へ移動する。地球への飛行時間の間、同時刻線はそれ自体で姿勢 $PB_5$ へ平行移動する。地球への着陸時には、時間 $\delta t$ の間に同時刻線は方向転換し、姿勢 $PB_6$ を取り、再び $x$ 軸に平行になる。地球上の時計と惑星上の時計は $t_0$ に等しい同一の時間を記録し、宇宙飛行士の時計は時間 $t_0/\gamma$ を示す。したがって、飛行時間の間地球上で経過した時間のより大きい部分は、宇宙飛行士の視点から見ると、ロケットの加速運動（2回の出発および2回の着陸）の時間に相当する。

両方の双子が（地球上の双子もロケット上の双子も）、時間の自然な（一樣な）進行テンポを感じ取ることになることに再度注目しよう。

地球上の時計で同一の時間間隔において地球から送られる電波信号を旅行者がどのように受信するのか、また、ロケットからの同様の信号が地球上でどのように受信されるのかを追跡することは興味深い。送られる電波信号が矢印で示されている図14bから、旅行者が、惑星に向かう経路上では彼に送られた全ての信号のうちの小さい部分しか記録しない

のに対し、復路上ではそれよりはるかに大きい部分を記録することが分かる。地球上では、ロケットからの信号は、旅行期間の事実上全体にわたってきわめて大きな時間間隔において受信されることになり、小さい時間間隔において受信されるのは、きわめて短い最終段階においてのみである。

自明のことであるが、現実にはこのような試験を実施することが不可能であることは、素人の読者でも理解している。第1に、ロケットがそのような速度に達するためには膨大なエネルギーを消費する必要があるが、そのエネルギーをロケットの機上に「蓄える」ことは不可能である。第2に、人間の生命の長さと比較可能な時間の間にそのような速度を得るためにはきわめて大きな加速度を創出することが要求されるが、その過負荷は生命と両立し得る限界レベルをはるかに上回る。そして最後に、星間ガス（水素およびそれよりはるかに重いイオン）の存在との関係上、亜光速での飛行は放射線防護の可能性と両立し得ない。

## 17. 結論

言うまでもなく、この覚書で提示されているアプローチは、一義的かつ普遍的なアプローチという地位を自負するものではない。このアプローチは、特殊相対性理論の基礎について叙述する際における様々なバリエーションの1つとみなすことができる。教授法の主要原則、すなわち最大限の理解し易さと一目瞭然性を指針とするならば、このアプローチでは、その結果が明白な物理的内容と疑う余地のない確実性を持っている実際の実験が記述されていることにより、この原則がかなり十全に確保されていると思われる。

この論文では、特殊相対性理論の妥当性を裏付ける「光学」実験に関する検討は、意図的に最小限にとどめられている。このことが、エーテルやエーテル風の存在、また一般に受け入れられている光速度の値を超える測定値についての「センセーショナルな」報告に関する思弁を回避することを可能にしている。

筆者は、本論文の執筆にあたり、ともに実りある議論をしてくださった同僚の L.G. デデンコ氏および V.A. カラワエフ氏に心から感謝申し上げる。

## 文献一覧

1. Taylor E F, Wheeler J A *Spacetime Physics* (San Francisco: W. H. Freeman, 1966) [邦訳: E. テイラー, J. ホイラー 『時空の物理学: 相対性理論への招待』, 1981]
2. Okun' L B, 『物理科学の成果』, 32 629 (1989)
3. Aleshkevich B A, Dedenko L G, Karavaev V A 『力学』 (監修: V A Aleshkevich) (モスクワ, 物理数学技術文献出版社, 2011)
4. Aleksandrov E B et al. 『実験・理論物理学雑誌』, レター 94 374 (2011)
5. Aleksandrov E B et al. 『物理科学の成果』, 54 1272 (2011)
6. Poincaré H "La mesure du temps" *Rev. Métaphys. Morale* 6 1 (1898)
7. Einstein A "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" *Ann. Physik* 322 891 (1905)
8. Bailey J et al. *Nature* 268 301 (1977) [論文名: Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit]
9. Rossi B, Hall D B *Phys. Rev.* 59 223 (1941) [論文名: Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum]
10. Hafele J C, Keating R E *Science* 177 166 (1972) [論文名: Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains]
11. Alley C O, in *Quantum Optics, Experimental Gravity, and Measurement Theory* (Eds P Meystre, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1983) p. 363

12. Vessot R F C, Levine M W *Gen. Relat. Grav.* **10** 181 (1979) [論文名 : A test of the equivalence principle using a space-borne clock]
13. Pound R V, Rebka G A (Jr.) *Phys. Rev. Lett.* **4** 337 (1960) [論文名 : Apparent Weight of Photons]
14. Alvåger T et al. *Phys. Lett.* **12** 260 (1964) [論文名 : Test of the second postulate of special relativity in the GeV region]